

Úvod

Předložená skripta vznikla na základě přednášek, které autoři po dobu více než 20 let vedli pro posluchače především numerické a výpočtové matematiky MFF UK. Jsou určena jak pro studenty magisterského tak i doktorského studia matematických, fyzikálních i inženýrských oborů a také pro doktorandy z jiných vysokých škol a ústavů. Navazují na přednášky z lineární funkcionální analýzy. Od čtenáře se vyžadují základní znalosti z klasické a lineární funkcionální analýzy, teorie integrálu a z teorie diferenciálních a integrálních rovnic.

Skripta jsou především zaměřena na teorii monotónních a potenciálních operátorů. Probíraná látka je rozložena do pěti kapitol. Ohvězdičované části v jednotlivých kapitolách představují doplňky, přehledy nejnovějších výsledků a zajímavostí.

V první kapitole nejprve připomeneme definice některých pojmů a uvedeme věty z matematické a z funkcionální analýzy, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Pak bude následovat krátké pojednání o řešitelnosti nelineárních rovnic v jedné a více proměnných, jejichž výběr přímo souvisí s teorií monotónních operátorů. V této kapitole budou uvedeny základní věty o pevném bodu. Bude také provedeno zobecnění pojmu monotónnosti funkce jedné proměnné na funkce více proměnných, zaveden pojem koercitivity a dokázána některá tvrzení o existenci řešení rovnic s více proměnnými. Dále budou definovány potřebné pojmy z diferenciálního počtu v normovaných prostorech a studovány jejich vlastnosti. Stručně pojednáme o operátorech typu Němyckého a o problémech minimalizace nelineárních funkcionálů. Uvedená teorie minimalizace bude využita ke studiu řešitelnosti operátorových rovnic s potenciálními operátory. Na závěr této kapitoly budou uvedeny definice a vlastnosti Sobolevových prostorů, a to především ty, které budou zapotřebí ve čtvrté kapitole pojednávající o slabém řešení diferenciálních okrajových úloh.

V druhé kapitole bude pojednáno o abstraktní teorii monotónních operátorů se zaměřením k řešení operátorových rovnic v Hilbertových a obecně v reflexivních Banachových prostorech. Je zde uveden přehled různých druhů spojitosti, monotónnosti, koercivity a dalších pojmů a jejich vzájemný vztah. Také zde budou dokázány speciální věty z teorie monotónních operátorů v Hilbertových prostorech. Tato teorie je podrobně vyložena v případě reflexivních Banachových prostorů. Také krátce pojednáme o některých zobecněních a numerických metodách řešení operátorových rovnic s monotónními operátory.

Teorie potenciálních operátorů bude vyložena ve třetí kapitole. Budou dokázány základní věty o řešitelnosti operátorových rovnic s těmito typy operátorů a studována problematika duality. Také krátce pojednáme o některých numerických metodách řešení těchto rovnic, mezi které patří především metoda Ritzova.

Ve čtvrté kapitole ve stručnosti uvedeme aplikaci teorie monotónních a potenciálních operátorů k problematice řešení nelineárních diferenciálních rovnic eliptického typu.

V poslední páté kapitole stručně pojednáme o (topologickém) stupni spojitých zobrazení a jeho vlastnostech jak v prostoru \mathbb{R}_n tak i v Banachových prostorech. Na základě těchto vlastností dokážeme Brouwerovu větu a také Schauderovu větu o pevném bodu.

V Praze 31. října 2010

Vít Dolejší a Karel Najzar