

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Na dva užívané typy křivkového integrálu vedou následující dvě vzorové úlohy:

Úloha 1. Máme spočítat hmotu drátu, známe-li jeho tvar a lineární hustotu rozložení hmoty. Tady potřebujeme znát jen tvar drátu.

Úloha 2. Máme spočítat práci proti silovému poli, pohybujeme-li v něm hmotným bodem po nějaké dráze. Tady nám nestačí tvar dráhy, ale musíme také znát způsob, jak se po této dráze pohybujeme.

Nejdříve si budeme muset ujasnit, jak je možné tvar drátu resp. tvar dráhy zadat. Budou to nějaké *křivky*. S definicí křivky jsme se již setkali v [KI], kapitola 6, oddíl 6.14. a v [KII], kapitola 8, oddíl 8.8. Následující definice křivky, vhodná pro definici integrálu, je trochu speciálnější, než výše zmíněné definice.

14.1. Křivky v \mathbb{R}_r .

Definice 14.1. *Křivkou třídy C^1 v \mathbb{R}_r nazveme zobrazení φ nějakého intervalu v \mathbb{R}_1 do \mathbb{R}_r , které je na tomto intervalu spojitě derivovatelné (v koncových bodech definičního intervalu, které do něj patří jde o jednostranné derivace) a má na něm nenulovou derivaci $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'(t), \dots, \varphi'_r(t))$. *Křivkou po částech třídy C^1 nazveme spojitě zobrazení φ nějakého intervalu $I \subset \mathbb{R}_1$ takové, že interval I lze rozložit na sjednocení konečného počtu intervalů I_i , $i = 1, 2, \dots, n$, každé dva z nichž mají společně nejvýše příslušné koncové body a to tak, že zúžení $\varphi|_{I_i^0}$ zobrazení φ na intervaly I_i^0 jsou křivky třídy C^1 . Budeme-li chtít explicitně u zobrazení zachytit jeho definiční interval I , budeme psát (φ, I) místo φ . Množinu $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi, I \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(I)$ nazýváme *geometrickým obrazem* křivky (φ, I) . Vektor $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t), \dots, \varphi'_r(t))$ nazýváme *tečným***

vektorem k této křivce v bodě $\varphi(t)$, vektor $\tau(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ *jednotkovým tečným vektorem*. (Bereme v \mathbb{R}_r normu generovanou skalárním součinem.)

Poznámka 14.1. Někteří autoři nazývají křivkou to, co jsme nazvali geometrickým obrazem křivky a příslušné zobrazení φ nazývají jejím *parametrickým zadáním*.

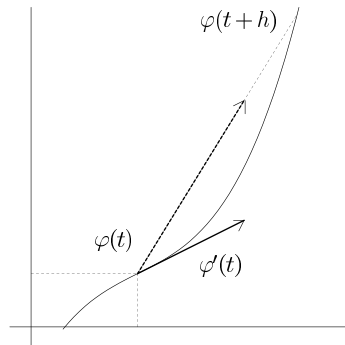
Poznámka 14.2. Tečný vektor je podle definice limitou (vzhledem k normě v \mathbb{R}_r) sečných vektorů

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

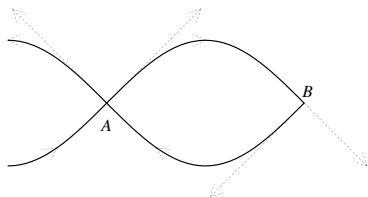
(viz obr. 14.1, na němž je tučně přerušovaně a se šipkou vyznačen vektor $(\varphi(t+h) - \varphi(t))/h$). Má tu vlastnost, že ze všech vektorů, vycházejících z bodu $\varphi(t)$ se ke křivce nejvíce přimyká ve smyslu

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h) \text{ pro } h \rightarrow 0.$$

V bodech, v nichž existují pouze jednostranné derivace zobrazení φ máme fakticky dva jednostranné tečné vektory (viz bod B na obrázku 14.2). V bodech, které dostaneme při různých hodnotách t_1, t_2 ($\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$) (jsou to body, v nichž se křivka protíná) máme fakticky také dva tečné vektory, každý je tečný k příslušnému kousku křivky odpovídajícímu t blízkým k t_1 resp. t_2 . Viz bod A na obr. 14.2. Na tomto obrázku i na dalších obrázcích je šipkami vyznačen způsob probíhání po geometrickém obrazu křivky při zvětšování parametru.



OBR. 14.1



OBR. 14.2

Poznámka 14.3. Je vidět, že naše definice křivky zachycuje jednak její tvar – geometrický obraz, ale také způsob probíhání po něm: body odpovídající menším t se probíhají před body s t větším.

Definice 14.2. Křivka φ se nazývá *jednoduchou*, je-li φ prosté a φ^{-1} je spojitě na $\langle \varphi \rangle$. Křivka $(\varphi, \langle a, b \rangle)$ se nazývá *uzavřenou*, je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$ a *jednoduchou uzavřenou*, je-li uzavřená a $(\varphi|_{(a,b)}, (a, b))$ je jednoduchá.

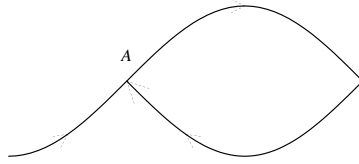
Křivka na obrázku 14.2. není jednoduchá, protože zobrazení φ ji zadávající není prosté (bod A se nabývá při různých hodnotách t_1, t_2 parametru t). Na obrázku 14.3. je také křivka, která není jednoduchá, ale proto, že zobrazení φ^{-1} není spojitě v bodě A (šipka v tomto bodě má vyjádřit to, že konec křivky do tohoto bodu nedojde a bod A se nabývá jen jednou). Na obrázku 14.3a. je nalevo uzavřená křivka, která není jednoduchá, napravo je jednoduchá uzavřená křivka.

Poznámka 14.4. Ukažme si na příkladech význam požadavku $\varphi' \neq 0$:

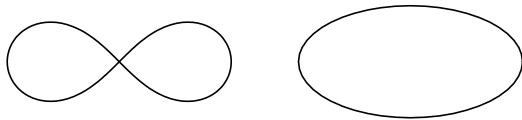
1) $\varphi(t) = A, t \in \mathbb{R}$, kde A je daný bod z \mathbb{R}^n . Pak je $\varphi'(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ a $\langle \varphi \rangle = \{A\}$, tj. jednobodová množina.

2) $x = \varphi_1(t) = t^2, y = \varphi_2(t) = t^3, t \in \mathbb{R}$. Je $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$, což je nulový vektor pro $t = 0$. Geometrický obraz této křivky je na obrázku 14.4: $t \geq 0$ odpovídají body $(x, x^{3/2}), x \geq 0, t \leq 0$ body $(x, -x^{3/2}), x \geq 0$. Bod $(0, 0)$ je tzv. *bod vratu*.

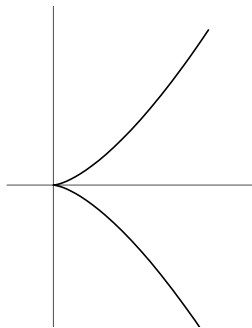
3) $\varphi_1(t) = \cos t^3, \varphi_2(t) = \sin t^3, t \in (-\delta, \delta)$. Geometrickým obrazem této křivky je kousek kružnice $x^2 + y^2 = 1$ okolo bodu $(1, 0)$. Je to „hezkká“ křivka, přestože je $\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = 0$.



OBR. 14.3



OBR. 14.3a



OBR. 14.4

4) $\varphi_1(t) = \cos t^2$, $\varphi_2(t) = \sin t^2$, $t \in (-\delta, \delta)$ dává dvakrát proběhnutý oblouček jednotkové kružnice $x^2 + y^2 = 1$ – jednou zhora do bodu $(1, 0)$, podruhé opačně od tohoto bodu nahoru. Opět je $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.

Nakonec budeme potřebovat ještě následující dva pojmy:

Definice 14.3. *Součtem* dvou křivek (φ, I) a (ψ, J) za předpokladu že interval I obsahuje svůj pravý koncový bod b_1 a interval J svůj levý koncový bod a_2 a $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$ nazýváme křivku (χ, K) , kde K je interval s koncovými body a_1 a $b_1 + (b_2 - a_2)$, přičemž tyto krajní body do K patří nebo nepatří podle toho, jestliže a_1 patří nebo nepatří do I resp. b_2 patří nebo nepatří do J a zobrazení χ je definováno předpisem

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pro } t \in I, \\ \psi(a_2 + t - b_1), & \text{pro } t \in K \setminus I. \end{cases}$$

Součet dvou křivek označujeme $\varphi \oplus \psi$.

Opačnou křivkou ke křivce (φ, I) nazýváme křivku $(\ominus\varphi, \ominus I)$, kde interval $\ominus I$ má koncové body $-b$ a $-a$, jsou-li $a < b$ koncové body I a zobrazení $\ominus\varphi$ je definováno předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \text{ pro } t \in \ominus I.$$

Poznámka 14.5. Při součtu se obě křivky napojí přes společný bod $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$. Opačná křivka má stejný geometrický obraz jako daná křivka, jen se její body probíhají v opačném pořadí (*v opačném smyslu*).

14.2. Dva druhy křivkového integrálu

Pokud nebude řečeno jinak, bude křivka znamenat křivku po částech třídy C^1 .

Definice 14.4. Nechť (φ, I) je křivka.

I. Je-li $f : \langle \varphi, I \rangle \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$, pak definujeme *integrál 1. druhu* předpisem

$$\int_{\varphi} f ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_I f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt,^{21}$$

pokud integrál napravo existuje jako vlastní Lebesgueův integrál.

²¹ $\|\cdot\|$ značí normu v \mathbb{R}^r , generovanou skalárním součinem $(x, y) = \sum_{i=1}^r x_i y_i$.