V. FORMY

21. LINEÁRNÍ FORMY

21.1. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. *Lineární formou* na prostoru V budeme rozumět každé zobrazení f prostoru V do tělesa T, pro které platí:

(i) $\forall x, y \in V \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $\forall x \in V \quad \forall a \in T \qquad f(ax) = a \cdot f(x)$.

Vlastnosti (i), (ii) je možno shrnout do jediné:

$$\forall x, y \in V \quad \forall a, b \in T \quad f(ax + by) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

Užitím matematické indukce dostaneme obecnou rovnost:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in V \quad \forall a_1, \dots, a_n \in T \qquad f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(x_i)$$

Vzhledem k tomu, že těleso T je vektorovým prostorem samo nad sebou, nejsou lineární formy na prostoru V nic jiného než homomorfismy prostoru V do prostoru T, tj. prvky prostoru $\mathrm{Hom}\,(V, T)$. Pojmy, které jsme v předchozích paragrafech zavedli pro homomorfismy, a tvrzení, která jsme pro ně dokázali, budeme tedy používat i pro lineární formy.

21.2. Příklady.

(i) Zobrazení, které každému vektoru prostoru V přiřazuje nulový prvek tělesa T, je tzv. *nulová* lineární forma na prostoru V. Ostatní lineární formy na prostoru V se nazývají *nenulové.*

(ii) Zobrazení, které každému vektoru $(x_1, \dots, x_n) \in T^n$ přiřazuje lineární kombinaci $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, kde skaláry $a_1, \dots, a_n \in T$ jsou pevně zvolené, je lineární forma na prostoru T^n.

(iii) Zobrazení, které každé matici A řádu n nad tělesem T přiřazuje její stopu $\mathrm{tr}\, A$, je lineární forma na prostoru $T^{n \times n}$.

(iv) Nechť V je prostor všech reálných funkcí reálné proměnné, které jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zobrazení, které každé funkci $g \in V$ přiřazuje číslo $\int_a^b g(x)\, dx$, je lineární forma na prostoru V. Podobně je lineární formou na prostoru V zobrazení, které každé funkci $g \in V$ přiřazuje číslo $\int_a^b g(x)\varphi(x)\, dx$, kde φ je pevně zvolená funkce prostoru V.

(v) Zobrazení, které každému polynomu $p \in T[x]$ přiřazuje prvek

$$\sum_{i=1}^{k} a_i p(c_i) \in T \ ,$$

kde $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_k \in T$ jsou pevně zvolené prvky, je lineární forma na prostoru $T[x]$.

21.3. Poznámka. Pro nulovou lineární formu f na prostoru V je $\operatorname{Ker} f = V$, tj. $d(f) = \dim V$, a $\operatorname{Im} f = O$, tj. $r(f) = 0$. Jestliže je f nenulová lineární forma na prostoru V, je nutně $r(f) = 1$, tj. f je epimorfismus. Podle věty o hodnosti a defektu je $\dim V = d(f) + 1$. Má-li tedy prostor V dimenzi n, má jádro $\operatorname{Ker} f$ nenulové lineární formy f dimenzi $n - 1$.

21.4. Poznámka. Každá lineární forma f na prostoru V je určena svými hodnotami v libovolné bázi prostoru V (viz 10.8); jestliže je $\{v_\alpha;\ \alpha \in \Lambda\}$ báze prostoru V, potom je forma f určena indexovaným souborem $\{f(v_\alpha);\ \alpha \in \Lambda\}$.

Protože je každý nenulový vektor $v \in V$ prvkem nějaké báze prostoru V, existuje podle předešlého lineární forma f taková, že $f(v) \neq 0$. Ke každému nenulovému vektoru $v \in V$ tedy existuje forma f na prostoru V, pro kterou $f(v) \neq 0$.

Jestliže je W podprostor prostoru V a vektor $v \in V$ v něm neleží, existuje z obdobných důvodů na prostoru V forma f, která je nulová na celém podprostoru W a pro kterou je $f(v) \neq 0$.

21.5. Poznámka. Nechť V je prostor dimenze n a $N = \{v_1, \dots, v_n\}$ jeho báze, nechť f je lineární forma na prostoru V. *Maticí lineární formy f vzhledem k bázi N* budeme rozumět matici homomorfismu f vzhledem k bázím N a $\{1\}$, tj. matici

$$\big(\ f(v_1),\ f(v_2),\ \dots\ ,\ f(v_n)\ \big)\ .$$

Jestliže je vektor $x \in V$ zadán svými souřadnicemi vzhledem k bázi N, tj. $\langle v \rangle_N = (x_1, \dots, x_n)$, potom je podle 11.2

$$f(x) = \big(\ f(v_1),\ f(v_2),\ \dots\ ,\ f(v_n)\ \big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ ,$$

tj.

$$f(x) = f(v_1) \cdot x_1 + f(v_2) \cdot x_2 + \cdots + f(v_n) \cdot x_n \ .$$

Této rovnosti se někdy říká *analytické vyjádření* lineární formy f vzhledem k bázi N. Hodnota formy f ve vektoru x se tedy vypočte jako součet součinů hodnot formy f ve vektorech báze N a souřadnic vektoru x vzhledem k téže bázi N.

Jestliže A je matice formy f vzhledem k bázi N a C je matice přechodu od báze M k bázi N, potom je AC matice formy f vzhledem k bázi M (viz 11.11).

21.6. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. *Duálním prostorem* k prostoru V budeme rozumět prostor $V^* = \mathrm{Hom}\,(V,T)$, tj. prostor všech lineárních forem na prostoru V.

Lineární formy na prostoru V tedy sčítáme a násobíme skalárem jako homomorfismy prostoru V do prostoru T (viz 10.27 a 7.8(ix)).

Zobrazení, které každé lineární formě na prostoru V přiřazuje její matici vzhledem k pevně zvolené bázi N, je izomorfismus prostoru V^* na prostor $T^{1\times n}$ (viz 11.13). Lineární závislost či nezávislost lineárních forem můžeme tedy zjistit tak, že stanovíme lineární závislost či nezávislost jejich matic jako vektorů prostoru $T^{1\times n}$ (tj. T^n). Stejným způsobem můžeme zjištění dimenze podprostoru $[f_1,\dots,f_m]$ prostoru V^* převést na stanovení hodnosti matice typu $m\times n$, jejíž řádky jsou maticemi forem $f_1,\dots,f_m$ vzhledem k nějaké pevně zvolené bázi prostoru V.

21.7. Věta. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Jestliže má prostor V konečnou dimenzi, je* $\dim V^* = \dim V$.

Důkaz. Jestliže je $\dim V = n$, potom je podle věty 11.13

$$\dim V^* = \dim \mathrm{Hom}\,(V,T) = \dim V \cdot \dim T = n\cdot 1 = n\ . \quad \square$$

21.8. Definice. Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T a nechť $N=\{v_1,\dots,v_n\}$ je jeho báze. Báze $N^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ duálního prostoru V^* se nazývá *duální* k bázi N, jestliže pro každé $i,j=1,\dots,n$ je

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}\ .$$

Jestliže je báze $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ duální k bázi $N=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, potom matice forem $f_1,f_2,\dots,f_n$ vzhledem k bázi N tvoří podle definice 21.8 kanonickou bázi prostoru $T^{1\times n}$ (resp. T^n). Analytická vyjádření forem $f_1,f_2,\dots,f_n$ vzhledem k bázi N jsou tedy

$$f_1(x)=x_1\ ,\qquad f_2(x)=x_2\ ,\qquad \dots\ ,\qquad f_n(x)=x_n\ .$$

21.9. Věta. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T. Potom ke každé bázi prostoru V existuje právě jediná duální báze prostoru V^*.*

Důkaz. Nechť $N=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ je báze prostoru V. Přiřadíme-li každé lineární formě $f\in V^*$ její matici vzhledem k bázi N, dostáváme podle věty 11.13 izomorfismus Ψ prostoru $V^*=\mathrm{Hom}\,(V,T)$ na prostor $T^{1\times n}$ matic typu $1\times n$. Kanonické bázi prostoru $T^{1\times n}$ odpovídá při izomorfismu Ψ, resp. Ψ^{-1} nějaká báze $\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$ prostoru V^*:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & T^{1\times n} \\ f & \longrightarrow & (\ f(v_1),\dots,f(v_n)\ ) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} f_1 & \longrightarrow & (\ 1,\ 0,\ 0,\ \dots\ ,\ 0\ ) \\ f_2 & \longrightarrow & (\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots\ ,\ 0\ ) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_n & \longrightarrow & (\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots\ ,\ 1\ ) \end{array}$$

Pro každé $i, j = 1,\dots,n$ je tedy $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, tj. báze $\{f_1,\dots,f_n\}$ je duální k bázi N.

Jiný důkaz. Nechť $N = \{v_1,\dots,v_n\}$ je báze prostoru V. Definujme lineární formy $f_1,\dots,f_n$ na prostoru V určením jejich hodnot ve vektorech báze N (viz 21.4): pro každé $i, j = 1,...,n$ nechť $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Ukážeme, že formy $f_1,\dots,f_n$ jsou lineárně nezávislé. Kdyby např. forma f_1 byla lineární kombinací forem $f_2,\dots,f_n$, tj.

$$f_1 = a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \ ,$$

pak aplikací této formy na vektor v_1 dostaneme

$$1 = f_1(v_1) \neq (a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)(v_1) = 0$$

a to je spor. Protože je množina $\{f_1,\dots,f_n\}$ lineárně nezávislá a má n prvků, je bází n-dimenzionálního prostoru V^* (viz 21.7); je to tedy duální báze k bázi N. $\square$

21.10. Dualita bází. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T, $N = \{v_1,\dots,v_n\}$ jeho báze a $N^* = \{f_1,\dots,f_n\}$ báze duálního prostoru V^*, která je duální k bázi N.

(i) Každou lineární formu $f \in V^*$ můžeme vyjádřit souřadnicemi vzhledem k bázi N^* prostoru V^*. Jestliže

$$\langle f\rangle_{N^*} = (a_1, a_2,\dots,a_n)\ , \qquad \text{tj.} \qquad f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n\ ,$$

potom je pro každé $i = 1,\dots,n$

$$f(v_i) = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)(v_i) = a_i\ ,$$

neboť báze N^* je duální k bázi N. Souřadnice formy f vzhledem k bázi N^* jsou tedy rovny hodnotám formy f ve vektorech báze N, tj.

$$\langle f\rangle_{N^*} = \big(\, f(v_1), f(v_2),\dots, f(v_n)\,\big)\ .$$

Tato n-tice je však zároveň maticí formy f vzhledem k bázi N, takže matice formy f vzhledem k bázi N a n-tice souřadnic formy f vzhledem k bázi N^* jsou totožné.

(ii) Každý vektor $v \in V$ můžeme vyjádřit souřadnicemi vzhledem k bázi N. Jestliže

$$\langle v \rangle_N = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \ , \qquad \text{tj.} \qquad v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n \ ,$$

potom je pro každé $i = 1, \ldots, n$

$$f_i(v) = f_i(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n) = b_i \ ,$$

neboť báze N^* je duální k bázi N. Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi N jsou tedy rovny hodnotám forem báze N^* ve vektoru v, tj.

$$\langle v \rangle_N = (f_1(v), f_2(v), \ldots, f_n(v)) \ .$$

21.11. Poznámka. Nechť V je vektorový prostor, $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jeho báze, $M = \{f_1, \ldots, f_n\}$ báze duálního prostoru V^* a $K = \{u_1, \ldots, u_n\}$ nějaká další báze prostoru V.

Utvořme matici $A = (a_{ik})$ řádu n, která má v řádcích zapsány po řadě matice forem $f_1, \ldots, f_n$ vzhledem k bázi K, tj. pro každé $i = 1, \ldots, n$ je

$$\big(f_i(u_1), \ldots, f_i(u_n) \big) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \ .$$

Matice A je regulární, neboť formy $f_1, \ldots, f_n$ tvoří bázi (lineárně nezávislým formám odpovídají lineárně nezávislé řádky matice A — viz poznámka za definicí 21.6). Utvořme matici $B = (b_{kj})$ řádu n, která má ve sloupcích souřadnice vektorů báze N vzhledem k bázi K, tj.

$$\langle v_j \rangle_K = (b_{1j}, \ldots, b_{nj}) \ .$$

Matice B je regulární, neboť vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé.

Báze M je duální k bázi N právě tehdy, když jsou matice A a B navzájem inverzní. Pro každé $i, j = 1, \ldots, n$ vypočítáme totiž hodnotu $f_i(v_j)$ dosazením souřadnic $\langle v_j \rangle_K$ do analytického vyjádření formy f_i vzhledem k bázi K, tj. „maticově“ vynásobíme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B:

$$f_i(v_j) = \big(f_i(u_1) \, , \ \ldots \ , \ f_i(u_n) \big) \cdot \langle v_j \rangle_K^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ .$$

Z této úvahy dostáváme *třetí důkaz* existence duální báze. Protože je matice B regulární, existuje k ní inverzní matice $A = B^{-1}$ a hledané formy $f_1, \ldots, f_n$ jsou dány svými maticemi vzhledem k bázi K — těmito maticemi jsou řádky matice A.

Dostáváme však i duální tvrzení. Ke každé bázi M duálního prostoru V^* existuje báze N prostoru V taková, že M je duální k N. Protože je matice A regulární, existuje k ní inverzní matice $B = A^{-1}$ a hledané vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou dány svými souřadnicemi vzhledem k bázi K — tyto souřadnice jsou ve sloupcích matice B.

Předchozí úvaha dává další metodu výpočtu. Duální bázi můžeme v konkrétních případech počítat podle definice (viz 21.8) nebo převodem analytických vyjádření (viz 21.8 a 21.5) nebo pomocí inverzní matice (viz 21.11).