

## POTENCIÁLOVÉ PROUDĚNÍ TEKUTIN

## 7.1. Úvod

Tato kapitola obsahuje několik příkladů na určení rovinného nevírového nezřídlového stacionárního proudění nestlačitelné kapaliny. Užívá se k tomu výsledků teorie funkcí komplexní proměnné (viz [KIV]), speciálně tzv. komplexního potenciálu. Připomeňme zde základní fakta. Zájemce o podrobnější výklad odkazujeme například na [CR], [LS], [B], [Ce], [K5], [ST].

Rovinné stacionární proudění v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}_2$  se popisuje *vektorem rychlosti*  $\mathbf{V}(x, y) = (V_x, V_y)$ , jehož složky  $V_x, V_y$  jsou funkcemi souřadnic  $x, y$  bodu v rovině. *Proudnicí* rychlostního pole  $\mathbf{V}$  nazýváme takovou křivku v  $\Omega$ , pro kterou je k ní tečný vektor v každém jejím bodě rovnoběžný s vektorem  $\mathbf{V}$  v tomto bodě. Z podmínky nevírovosti máme rovnici

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0,$$

z podmínek stacionárnosti a nezřídlovosti rovnici

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Z podmínky (1) vyplývá existence tzv. (*reálného*) *potenciálu*  $u(x, y)$  (v jednoduše souvislé oblasti globálně, ve vícenásobně souvislé pouze lokálně nebo jako mnohoznačná funkce), pro který platí

$$(3) \quad \mathbf{V} = \operatorname{grad} u.$$

Dosazení (3) do (2) dá

$$(4) \quad \Delta u = 0,$$

tj. potenciál  $u$  je řešením Laplaceovy rovnice (je to harmonická funkce). Proto řešení úloh teorie proudění vede na řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici. K tomu (jak víme z předchozí kapitoly) se v případě dvou nezávislých proměnných dá s výhodou užít funkcí komplexní proměnné.

Základním pojmem je tzv. *komplexní potenciál*: v důsledku (4) existuje k reálnému potenciálu  $u$  harmonicky sdružená funkce  $v(x, y)$  (v jednoduše souvislé oblasti globálně, ve vícenásobně souvislé jen lokálně nebo jako mnohoznačná funkce), tj. taková harmonická funkce  $v$ , že funkce

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

je holomorfní funkcí proměnné  $z$ . Tato funkce  $f$  se nazývá *komplexním potenciálem* rychlostního pole  $\mathbf{V}$  a jeho derivace  $f'$  *komplexní rychlostí*. Funkce  $v$  se nazývá *proudovou funkcí*. Z definice je zřejmé, že komplexní potenciál je prouděním určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Naopak, na každou holomorfní funkci  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  se můžeme dívat jako na komplexní potenciál proudění  $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ , pro něž je  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  reálným potenciálem a  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  proudovou funkcí, a tedy v důsledku Cauchy-Riemannových podmínek je

$$V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)},$$

tj.

$$\|\mathbf{V}\| = |f'|, \quad V_x = \operatorname{Re} f', \quad V_y = -\operatorname{Im} f'.$$

Protože jsou křivky  $u = \text{konst}$ ,  $v = \text{konst}$  ortogonální, je vektor  $\mathbf{V} = \operatorname{grad} u$  tečným vektorem ke křivce  $v = \text{konst}$ , a tato křivka je proto proudnicí. Křivky  $u = \text{konst}$  se nazývají *ekvipotenciálními křivkami*. V důsledku (5) jsou tedy proudnice resp. ekvipotenciální křivky dány předpisem

$$\operatorname{Im} f = \text{konst.} \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Re} f = \text{konst.}$$

Je-li  $\varphi$  křivka v  $\mathbb{R}_2$  a  $\mathbf{V}$  vektorové pole, pak integrály

$$N_\varphi = \int_{\varphi} (\mathbf{V}, \mathbf{n}) ds = \int_{\varphi} V_n ds, \quad \Gamma_\varphi = \int_{\varphi} \mathbf{V} d\varphi = \int_{\varphi} (\mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}) ds = \int_{\varphi} V_\tau ds$$