KAPITOLA 7

POTENCIÁLOVÉ PROUDĚNÍ TEKUTIN

7.1. Úvod

Tato kapitola obsahuje několik příkladů na určení rovinného nevírového nezřídlového stacionárního proudění nestlačitelné kapaliny. Užívá se k tomu výsledků teorie funkcí komplexní proměnné (viz [KIV]), speciálně tzv. komplexního potenciálu. Připomeňme zde základní fakta. Zájemce o podrobnější výklad odkazujeme například na [CR], [LS], [B], [Ce], [K5], [ST].

Rovinné stacionární proudění v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ se popisuje *vektorem rychlosti* $\boldsymbol{V}(x,y) = (V_x, V_y)$, jehož složky V_x, V_y jsou funkcemi souřadnic x, y bodu v rovině. *Proudnicí* rychlostního pole $\boldsymbol{V}$ nazýváme takovou křivku v Ω, pro kterou je k ní tečný vektor v každém jejím bodě rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{V}$ v tomto bodě. Z podmínky nevírovosti máme rovnici

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0, \tag{1}$$

z podmínek stacionárnosti a nezřídlovosti rovnici

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0. \tag{2}$$

Z podmínky (1) vyplývá existence tzv. *(reálného) potenciálu* $u(x,y)$ (v jednoduše souvislé oblasti globálně, ve vícenásobně souvisle pouze lokálně nebo jako mnohoznačná funkce), pro který platí

$$\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} u. \tag{3}$$

Dosazení (3) do (2) dá

$$\triangle u = 0, \tag{4}$$

tj. potenciál u je řešením Laplaceovy rovnice (je to harmonická funkce). Proto řešení úloh teorie proudění vede na řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici. K tomu (jak vime z předchozí kapitoly) se v případě dvou nezávislých proměnných dá s výhodou užít funkcí komplexní proměnné.

Základním pojmem je tzv. *komplexní potenciál*: v důsledku (4) existuje k reálnému potenciálu u harmonicky sdružená funkce $v(x, y)$ (v jednoduše souvislé oblasti globálně, ve vícenásobně souvislé jen lokálně nebo jako mnohoznačná funkce), tj. taková harmonická funkce v, že funkce

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy,$$

je holomorfní funkcí proměnné z. Tato funkce f se nazývá *komplexním potenciálem* rychlostního pole $\boldsymbol{V}$ a jeho derivace f' *komplexní rychlostí*. Funkce v se nazývá *proudovou funkcí*. Z definice je zřejmé, že komplexní potenciál je prouděním určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Naopak, na každou holomorfní funkci $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, $z = x+iy$ se můžeme dívat jako na komplexní potenciál proudění $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$, pro něž je $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ reálným potenciálem a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ proudovou funkcí, a tedy v důsledku Cauchy-Riemannových podmínek je

$$V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)},$$

tj.

$$||\boldsymbol{V}|| = |f'|,\ V_x = \operatorname{Re} f',\ V_y = -\operatorname{Im} f'.$$

Protože jsou křivky $u =$ konst, $v =$ konst ortogonální, je vektor $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} u$ tečným vektorem ke křivce $v =$ konst, a tato křivka je proto proudnicí. Křivky $u =$ konst se nazývají *ekvipotenciálními křivkami.* V důsledku (5) jsou tedy proudnice resp. ekvipotenciální křivky dány předpisem

$$\operatorname{Im} f = \text{konst. resp. } \operatorname{Re} f = \text{konst.}$$

Je-li φ křivka v $\mathbb{R}_2$ a $\boldsymbol{V}$ vektorové pole, pak integrály

$$N_\varphi = \int_\varphi (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})\, ds = \int_\varphi V_n\, ds,\ \Gamma_\varphi = \int_\varphi \boldsymbol{V}\, d\varphi = \int_\varphi (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\tau})\, ds = \int_\varphi V_\tau\, ds$$