Předmluva

Semestrální přednášku (s dotací 3/0), věnovanou úvodu do ergodické theorie, jsem konal na MFF UK od roku 2007. Přednáška je určena studentkám a studentům se spíše skrovnou předběžnou průpravou, u čtenářky či čtenáře této knihy očekávám jen solidní znalost reálné analysy a theorie míry a jistou orientaci v základních pojmech funkcionální analysy. Znalost theorie pravděpodobnosti je potřebná jen v několika málo odstavcích, které lze bez velké škody přeskočit, jest pouze vhodné být seznámen s vlastnostmi podmíněné střední hodnoty (které jsou však v textu vyloženy). Primárním cílem přednášky bylo „rozšířit obzory“ a podat základní poučení o půvabné partii mathematiky, případně naznačit některé její klasické aplikace v theorii pravděpodobnosti či theorii čísel, nikoliv připravit pro další badatelskou práci v oblasti dynamických systémů; text je tedy programově stručný, elementární a, pokud to jen lze, s podrobnými důkazy.

Prvních pět kapitol knihy odpovídá dosti přesně látce, probrané na přednášce v letním semestru 2019, doplněné o úvahy (odsunuté do poznámek nebo vysázené petitem, a někdy trochu náročnější než základní text), jež z časových důvodů lze na přednášce nanejvýše letmo zmínit, které však podle mého názoru obsahují zajímavé doplňující informace, anebo jsou důležité pro logickou kohesi výkladu.

Popišme strukturu knihy poněkud podrobněji. Základním objektem, který vyšetřujeme, je měřitelný dynamický systém $(X, \mathscr{X}, m, T)$, kde

- $(X, \mathscr{X})$ je měřitelný prostor, přičemž body množiny X interpretujeme jako možné stavy systému,
- T je měřitelné zobrazení X do sebe, representující vývoj systému za jeden krok, to jest, Tx je stav systému v čase 1, byl-li x stav v čase 0,
- m je T-invariantní pravděpodobnostní míra, tedy taková, že pro libovolnou náhodnou veličinu f na $(X, \mathscr{X}, m)$ mají f a $f \circ T$ stejné rozdělení.

Uvažujeme-li iterovaná zobrazení T^n, dostaneme striktně stacionární proces $\boldsymbol{f} = (f \circ T^n,\ n \geq 0)$; ukážeme, že měřitelné dynamické systémy a striktně stacionární náhodné procesy popisují v podstatě týž mathematický objekt, avšak pro výklad je v knize zvolena řeč dynamických systémů.

Požadavek invariance míry m má překvapivě silné důsledky a umožňuje odvodit důležité výsledky o asymptotickém chování dynamického systému, to jest, o (pravděpodobnostním) chování trajektorií $(T^n x)_{n=0}^{\infty}$ při n jdoucím do nekonečna. Asymptotické chování náhodné posloupnosti nelze vždy uspokojivě popsat, striktní stacionarita je, spolu s nezávislostí, martingalovou a markovskou vlastností, jednou ze fundamentálních charakteristik, které to umožňují.

Základní abstraktní věty o chování měřitelných dynamických systému odvodíme v druhé a třetí kapitole. Hlavním výsledkem druhé kapitoly je Poincarého věta o rekurenci, ukazující, že m-skoro každý bod x libovolné měřitelné množiny A se do A nekonečněkrát vrátí (neboli že množina $\{n \geq 0;\ T^n x \in A\}$ je nekonečná). Ve třetí kapitole dokážeme tzv. individuální ergodickou větu: pro každou integrovatelnou funkci f posloupnost $(f(T^n x))_{n=0}^{\infty}$ skoro jistě konverguje ve smyslu aritmetických průměrů, to jest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$$

existuje m-skoro jistě. (V řeči striktně stacionárních procesů: pro proces $\boldsymbol{f}$ platí silný zákon velkých čísel.) Ergodická věta a její snadné důsledky nám umožní vydělit a charakterisovat klíčové třídy dynamických systémů, jejichž chování je více „chaotické“ či „náhodné“; zhruba jde o to, v jakém smyslu se, pro libovolnou volbu $A, B \in \mathscr{X}$, stávají množiny A a $T^{-n}B$ asymptoticky nezávislé pro velká n.

Jádrem knihy je čtvrtá kapitola, v níž uvedeme jedenáct konkrétních dynamických systémů, na něž lze s úpěchem aplikovat dříve odvozené výsledky a přitom se mnohdy vyjeví jejich přesah do jiných partií mathematiky. Některé z příkladů jsou jen ilustrativní, ale jiné mají charakter „malé theorie“ a jejich analysa je pracnější, než byly důkazy vět z předchozích kapitol. Největší pozornost je věnována následujícím modelům:

- V § 2 dokážeme, že pro libovolné spojité zobrazení T kompaktního metrického prostoru do sebe existuje invariantní pravděpodobnostní míra, a tedy možnost vyšetřovat T jako měřitelný dynamický systém. Nejdůležitější poučení z příkladu je však methoda, kterou invariantní míru zkonstruujeme, neboť se uplatnila v mnoha oblastech mathematiky.
- V § 4 je uvažována posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin jako dynamický systém, speciálně, silný zákon velkých čísel pro tuto posloupnost je vyvozen jako snadný důsledek ergodické věty.
- § 6 je věnován markovským řetězcům s konečně mnoha stavy. Ergodická theorie umožňuje dokázat většinu jejich základních vlastností velmi elegantním způsobem.
- Následující § 7 je věnován zobrazení $y \longmapsto cy$ jednotkové kružnice v rovině na sebe (tedy rotaci kružnice o úhel $\arg c$), systému jednoduchému jen zdánlivě. Vlastnosti tohoto systému závisí na aritmetických vlastnostech čísla c; věty, jež dokážeme, lze zajímavým způsobem vyslovit v řeči theorie čísel a mají i vztah k Benfordovu zákonu (který popisuje rozdělení první platné číslice mnoha souborů dat).
- I v § 8 je vyšetřován dynamický systém na kružnici, a to daný zobrazením $y \longmapsto y^k$. Mezi důsledky patří důkaz, že skoro všechna reálná čísla jsou normální, to jest, zhruba řečeno, číslice 0 až 9 jsou v jejich dekadickém rozvoji rovnoměrně rozdělené.
- Thematem § 11 je vztah ergodické theorie a řetězových zlomků. Jakkoliv si v důkazech vystačíme s týmiž elementárními prostředky jako ve zbytku knihy, jde o výsledky o stupeň obtížnější, než jsou tvrzení dříve probíraná. Proto je základní výklad veden neformálně a přesné, detailní důkazy jsou postponovány do apendixu. Nechtěl jsem však důkazy zcela vynechat, neboť se mi zdálo důležité ukázat alespoň na jednom příkladu, že i s úvodními poznatky ergodické theorie lze dojíti k značně netriviálním větám.

Ve stručné páté kapitole pojednáváme o problému, jak rozpoznat, zda dva dynamické systémy jsou ve vhodném smyslu isomorfní. To je důležité thema, ale přesahující zvolený elementární rámec knihy, takže se omezíme na úvodní informaci bez důkazů.

Neboť předběžné znalosti posluchaček a posluchačů přednášky byly, zvláště v posledních letech, značně heterogenní a některé věty, jež se užívají v základním textu, zjevně nebyly části auditoria běžné, je jako šestá kapitola připojen apendix. V něm nejprve, maje na mysli spíše studentky a studenty theorie pravděpodobnosti, připomínám některé výsledky funkcionální analysy a poté – způsobem vhodným pro analytiky – pojem podmíněné střední hodnoty a slabé konvergence měr. Pro všechny je pak určen soustavný výklad základních vlastností řetězových zlomků, na nějž navazují, jak již bylo zmíněno, důkazy vět z § 11 čtvrté kapitoly.

Kniha je uzavřena seznamem použité literatury* a rejstříkem značení.

Jsa jen laický uživatel ergodické theorie držel jsem se zpočátku při přednáškách dosti těsně klasické učebnice [76]; v části věnované příkladům jsem s prospěchem užil též knihy [53] a [9] a skripta [56]. Postupně se přednáška těmto vzorům poněkud vzdálila, rád bych zmínil zvláště vliv knih [20] a [73], byť se objevily až v době, kdy značná část tohoto textu byla již napsána.† Čtenářům zmíněné knihy doporučuji pro hlubší seznámení s ergodickou theorií; je možno v nich nalézti i odkazy na původní práce či na monografickou a učebnicovou literaturu. Jasné poučení o vztazích ergodické theorie k hladké a topologické dynamice poskytuje kniha [28], byť důkazy v ní uvedené jsou někdy určeny spíše dosti pokročilým čtenářům. Četné zajímavé přehledové statě o různých thematech vztahujících se k ergodické theorii a dynamickým systémům obsahuje kniha [42].

Kolegové Tomáš Kroupa a Petr Čoupek přečetli takřka celý text a jsem jim zavázán za cenné připomínky. Důležité podněty jsem dostal i od obou recensentů skript. Na četné drobné nedostatky jsem byl upozorněn posluchačkami a posluchači přednášky, z nichž jmenovitou zmínku si zaslouží alespoň Miroslav Jetleb.

*V textu na ni odkazuji číslem podle tohoto seznamu.

†Tam, kde jsem při výkladu užil další literaturu, upozorňuji na to přímo v textu v poznámkách pod čarou.