1. Základní definice

Cílem této krátké kapitoly je zavést měřitelné dynamické systémy a podati jejich pravděpodobnostní interpretaci. Opakovaně budeme potřebovat následující označení: je-li $(X, \mathscr{S}, \nu)$ prostor s mírou, $(H, \mathscr{H})$ měřitelný prostor a $S\colon X \longrightarrow H$ $(\mathscr{S}, \mathscr{H})$-měřitelné zobrazení, označíme $S_{\#}\nu$ obraz míry ν při zobrazení S, to jest míru na $\mathscr{H}$ definovanou předpisem $S_{\#}\nu(B) = \nu(S^{-1}B)$, $B \in \mathscr{H}$. Identické zobrazení množiny X na sebe budeme značit id_X nebo jenom id.

§ 1 – Endomorfismy a automorfismy

Definice 1.1. Buď $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor s mírou. Pravíme, že zobrazení $T\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ je *endomorfismus* prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, jestliže

1° T je měřitelné: $T^{-1}F \in \mathscr{F}$ pro všechna $F \in \mathscr{F}$,

2° T zachovává míru μ: $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pro všechna $A \in \mathscr{F}$.

Řekneme, že T je *automorfismus* prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, je-li T bijekce a obě zobrazení T, T^{-1} jsou endomorfismy.

Poznámka 1.1. a) Názvy endomorfismus a automorfismus jsou přejaty z ruské terminologie, v angličtině se užívají též, ale termíny „measure-preserving transformation“ a „invertible measure-preserving transformation“ jsou častější.

b) Podmínka 2° z definice očividně znamená, že $T_{\#}\mu = \mu$. Míru μ s touto vlastností nazýváme *invariantní míra* pro T nebo T*-invariantní míra*.

c) Jsou-li S a T endomorfismy, je i jejich superposice $S \circ T$ endomorfismus.

d) Bijektivní endomorfismus T, jehož inverse T^{-1} je měřitelná, je automorfismus.

e) O čtveřici $(\Omega, \mathscr{F}, \mu, T)$ se někdy hovoří jako o *(měřitelném) dynamickém systému.*

Poznámka 1.2. Je-li μ T-invariantní míra a $\alpha > 0$, pak je i $\alpha\mu$ invariantní míra. Stačí tedy rozlišovat dva případy: $\mu\Omega = 1$ a $\mu\Omega = \infty$. Základní výsledky elementární ergodické theorie se týkají konečných invariantních měr, v této přednášce proto budeme – až na několik málo výjimek, jež budou explicitně zmíněny – vždy předpokládat, že $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor; to nám také umožní interpretovat měřitelné dynamické systémy v pravděpodobnostních pojmech.[12]

Poznámka 1.3. Buď $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ zúplnění prostoru s mírou $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$. Endomorfismus T prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ je též endomorfismem $(\Omega, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$.

Naznačme důkaz: jak známo,

$$\bar{\mathscr{F}} = \bigl\{F \triangle B;\ F \in \mathscr{F},\ \exists N \in \mathscr{F},\ \mu N = 0,\ N \supseteq B\bigr\}, \quad \bar{\mu}(F \triangle B) = \mu(F).$$

Jest však

$$\bar{\mu}\bigl(T^{-1}(F \triangle B)\bigr) = \bar{\mu}\bigl(T^{-1}F \triangle T^{-1}B\bigr) = \mu\bigl(T^{-1}F\bigr) = \mu(F) = \bar{\mu}(F \triangle B),$$

[12]Podotkněme však, že i v pravděpodobnostním kontextu se mohou objevit σ-konečné invariantní míry, například při vyšetřování nulově rekurentních markovských řetězců.

neboť $T^{-1}B \subseteq T^{-1}N$ a $\mu(T^{-1}N) = \mu(N) = 0$.

Často budeme užívat následující užitečné jednoduché lemma.

Lemma 1.1. *Nechť je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ pravděpodobnostní prostor, $T\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ měřitelné zobrazení a nechť existuje systém $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ uzavřený na konečné průniky, generující $\mathscr{F}$ a splňující $\mu(T^{-1}D) = \mu(D)$ pro každé $D \in \mathscr{D}$. Potom je T endomorfismus.*

Důkaz. Položme $\mathscr{H} = \big\{A \in \mathscr{F};\ \mu(T^{-1}A) = \mu(A)\big\}$. Ježto $\mathscr{H} \supseteq \mathscr{D}$, stačí podle Dynkinova lemmatu ověřit, že $\mathscr{H}$ je σ-aditivní systém, to jest ukázat, že $\Omega \in \mathscr{H}$, $B \setminus A \in \mathscr{H}$, kdykoliv $A, B \in \mathscr{H}$, $B \supseteq A$, a $\bigcup_{k\geq 1} A_k \in \mathscr{H}$, kdykoliv $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{H}$ jsou po dvou disjuktní. To je ale snadné, ku příkladu

$$\begin{aligned} \mu\big(T^{-1}(B \setminus A)\big) &= \mu(T^{-1}B \setminus T^{-1}A) = \mu(T^{-1}B) - \mu(T^{-1}A) = \mu(B) - \mu(A) \\ &= \mu(B \setminus A), \end{aligned}$$

podobně se postupuje pro disjunktní sjednocení. Q.E.D.

V několika příkladech, které budeme vyšetřovat, je přirozené uvažovat spojitý čas, uveďme proto definici měřitelného dynamického systému se spojitým časem.

Definice 1.2. Buď $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor s mírou.

i) Soubor $(T_t,\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ endomorfismů prostoru s mírou $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ se nazývá *měřitelná pologrupa endomorfismů*, jestliže $T_0 = \mathrm{id}$, $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ pro všechna $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ a zobrazení $(t, \omega) \longmapsto T_t(\omega)$ je $\mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathscr{F}$-měřitelné.

ii) Soubor $(T_t,\ t \in \mathbb{R})$ automorfismů prostoru s mírou $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ se nazývá *měřitelná grupa automorfismů*, jestliže $T_0 = \mathrm{id}$, $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$ a zobrazení $(t, \omega) \longmapsto T_t(\omega)$ je $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{F}$-měřitelné.

Poznámka 1.4. a) Anglicky se měřitelná grupa automorfismů nazývá obvykle „flow“, měřitelná pologrupa endomorfismů pak „semiflow“. Z českých ekvivalentů *tok* a *polotok* se první občas užívá, druhý jen vzácně. Někteří autoři pro zdůraznění hovoří o jednoparametrické grupě, respektive pologrupě.

b) Je-li (T_t) grupa automorfismů, pak očividně $T_{-t} = T_t^{-1}$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

§ 2 – Striktně stacionární procesy

Měřitelné dynamické systémy působí jako čistě deterministický objekt, nyní však ukážeme, že mají velmi přirozenou pravděpodobnostní interpretaci: odpovídají takřka bijektivně striktně stacionárním náhodným procesům.

Nechť I je jedna z množin $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ nebo $\mathbb{R}$. Připomeňme, že (reálný) náhodný proces $(\xi_t,\ t \in I)$ se nazývá *striktně stacionární*, jestliže pro všechna $k \geq 1$, $t_1, \ldots, t_k \in I$ a $h \in I$ mají náhodné vektory $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})^{\mathrm{T}}$ a $(\xi_{t_1+h}, \ldots, \xi_{t_k+h})^{\mathrm{T}}$ stejné rozdělení na $\mathbb{R}^k$.

Buď T endomorfismus pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ a $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Položme $T^0 = \mathrm{id}$, $T^1 = T$, $T^{n+1} = T \circ T^n$ pro $n \geq 1$.[13] Potom

[13] Z kontextu bude vždy jasné, kdy horní index značí iterovanou superposici a kdy mocninu.

je náhodný proces $(f \circ T^n,\, n \in \mathbb{N})$ striktně stacionární. Vskutku, zvolme $k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k, h \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ libovolně, potom

$$
\begin{aligned}
\mu\bigl\{\omega \in \Omega;\, & f(T^{n_1+h}\omega) \in A_1, \dots, f(T^{n_k+h}\omega) \in A_k\bigr\} \\
&= \mu\bigl((f \circ T^{n_1} \circ T^h)^{-1}(A_1) \cap \dots \cap (f \circ T^{n_k} \circ T^h)^{-1}(A_k)\bigr) \\
&= \mu\bigl((T^h)^{-1}(T^{n_1})^{-1} f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap (T^h)^{-1}(T^{n_k})^{-1} f^{-1}(A_k)\bigr) \\
&= \mu\bigl((T^h)^{-1}\{(T^{n_1})^{-1} f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap (T^{n_k})^{-1} f^{-1}(A_k)\}\bigr) \\
&= \mu\bigl((T^{n_1})^{-1} f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap (T^{n_k})^{-1} f^{-1}(A_k)\bigr) \\
&= \mu\bigl\{\omega \in \Omega;\ f(T^{n_1}\omega) \in A_1, \dots, f(T^{n_k}\omega) \in A_k\bigr\},
\end{aligned}
$$

ve čtvrté rovnosti jsme užili toho, že podle poznámky 1.1(c) je T^h endomorfismus.

Analogicky, automorfismus T vede na striktně stacionární proces $(f \circ T^k,\, k \in \mathbb{Z})$ a pod.

Naopak, buď $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i,\, i \in I)$ striktně stacionární proces, definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$. Nechť pro určitost $I = \mathbb{N}$. Ukážeme, že kanonická verse[14] procesu $\boldsymbol{\xi}$ má tvar $(f \circ T^k,\, k \in \mathbb{N})$ pro vhodnou funkci f a endomorfismus T. Připomeňme konstrukci kanonické verse: Položme

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigl\{\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}(i))_{i=0}^{\infty};\ \tilde{\omega}(i) \in \mathbb{R} \text{ pro } i \geq 0\bigr\}, \\
&X_t \colon \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},\ \tilde{\omega} \longmapsto \tilde{\omega}(t),\ t \in \mathbb{N}, \\
&\tilde{\mathscr{F}} = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\bigl(X_t,\, t \in \mathbb{N}\bigr);
\end{aligned}
$$

σ-algebra $\tilde{\mathscr{F}}$ je tedy generována měřitelnými válci, to jest množinami tvaru

$$
\tilde{A} = \bigl\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega};\ \tilde{\omega}(t_i) \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, k\bigr\} \tag{1.1}
$$

pro nějaké $k \geq 1$, $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ a $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Zobrazení

$$
\Lambda \colon \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega},\ \omega \longmapsto \xi_{\bullet}(\omega) = \bigl(\xi_i(\omega)\bigr)_{i=0}^{\infty}
$$

je zřejmě $(\mathscr{F}, \tilde{\mathscr{F}})$-měřitelné, protože pro měřitelný válec tvaru (1.1) je

$$
\Lambda^{-1}(\tilde{A}) = \bigl\{\omega \in \Omega;\ \xi_{t_i}(\omega) \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, k\bigr\} \in \mathscr{F}.
$$

Můžeme proto definovat pravděpodobnostní míru $\tilde{\boldsymbol{P}}$ na $\tilde{\mathscr{F}}$ předpisem $\tilde{\boldsymbol{P}} = \Lambda_{\#}\boldsymbol{P}$. Z konstrukce plyne, že $\boldsymbol{\xi}$ na $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ a $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$ na $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\boldsymbol{P}})$ mají stejná konečně-dimensionální rozdělení (ekvivalentně: mají stejné rozdělení na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{N}})$).

[14] Kanonická verse procesu je definována jako proces projekcí na prostoru trajektorií mající stejná konečně-rozměrná rozdělení jako proces původní.