4. Příklady

Cílem této kapitoly je probrat několik modelových příkladů, ilustrujících abstraktní výsledky kapitoly 3. Chceme představit co nejvíce method, takže nebudeme brát zřetel na to, že některé vyšetřované modely lze na sebe bijektivně převésti, pokud přímý postup ukáže více, než redukce k jinému modelu.[47]

§ 1 – Rozcvička

Buď $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ pětiprvková množina a $T\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ permutace

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & b & e & d \end{pmatrix}$$

se dvěma cykly. Pravděpodobnostní míra na μ na Ω je T-invariantní, právě když

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}), \quad \mu(\{d\}) = \mu(\{e\}).$$

Buď μ invariantní. Množiny $\{a, b, c\}$ a $\{d, e\}$ jsou invariantní, tedy T je ergodické, když a jen když $\mu(\{a, b, c\}) = 0$, anebo $\mu(\{d, e\}) = 0$.

Podobně lze vyšetřit cyklickou permutaci

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnostní míra μ je $\bar{T}$-invariantní, právě když

$$\mu(\{a\}) = \cdots = \mu(\{e\}) = \frac{1}{5}. \tag{4.1}$$

Je-li podmínka (4.1) splněna, je $\bar{T}$ ergodické. Silně mixující však není: položme $A = B = \{a\}$, pak $\bar{T}^{-5n} A \cap B = A$ pro všechna $n \geq 0$. (Užitím věty 3.13 se lze ostatně snadno přesvědčit, že permutace na konečné množině nemůže být, vyjma triviální případy, nikdy ani slabě mixující.)

Jiný zcela jednoduchý příklad: nechť je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ libovolný pravděpodobnostní prostor, pak je identické zobrazení $T = \mathrm{id}$ endomorfismus, jenž je ergodický, právě když je μ dvouhodnotová míra, $\mu(\mathscr{F}) = \{0, 1\}$.

§ 2 – Krylov-Bogoljubovova věta

V tomto paragrafu dokážeme slavnou klasickou větu N. M. Krylova a N. N. Bogoljubova z roku 1937 o existenci invariantní míry. Budeme přitom potřebovat elementární poznatky o konvergenci a kompaktnosti v prostoru $\mathscr{P}(X)$ všech borelovských pravděpodobnostních měr na metrickém prostoru X opatřeném slabou topologií.[48]

---

[47] Problematice isomorfismu dynamických systémů bude věnována následující kapitola.

[48] Čtenářku nebo čtenáře, kterým nebudou označení a užívané výsledky zřejmé, odkazujeme na § 3 šesté kapitoly, kde je vše potřebné zavedeno.

Věta 4.1. *Buď $T\colon X \longrightarrow X$ spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru X do sebe. Potom existuje T-invariantní borelovská pravděpodobnostní míra ν^* na X.*

Důkaz. Zvolme libovolně pevně míru $\nu \in \mathscr{P}(X)$ a položme

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k_{\#}\nu, \quad n \geq 1,$$

to jest,

$$\nu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \nu(T^{-k}A), \quad n \geq 1,\ A \in \mathscr{B}(X).$$

Očividně, $(\nu_n,\ n \geq 1)$ je posloupnost měr v $\mathscr{P}(X)$, tedy ze sekvenciální kompaktnosti $\mathscr{P}(X)$ plyne existence podposloupnosti $(\nu_{n_j},\ j \geq 1)$ a míry $\nu^* \in \mathscr{P}(X)$ tak, že w*-$\lim_{j\to\infty} \nu_{n_j} = \nu^*$.

Chceme dokázat, že $T_{\#}\nu^* = \nu^*$, tedy že ν^* je T-invariantní míra; k tomu stačí ověřit

$$\forall f \in \mathscr{C}_b(X) \qquad \int_X f\,\mathrm{d}\nu^* = \int_X f\,\mathrm{d}T_{\#}\nu^* = \int_X f\circ T\,\mathrm{d}\nu^*$$

(druhá rovnost je ovšem okamžitým důsledkem tvrzení 3.2). Zvolme $f \in \mathscr{C}_b(X)$ libovolně pevně, pak

$$\begin{aligned}\int_X f\,\mathrm{d}\nu^* &= \lim_{j\to\infty}\int_X f\,\mathrm{d}\nu_{n_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_X f\,\mathrm{d}T^k_{\#}\nu\\ &= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_X f\circ T^k\,\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

Podle předpokladu je T spojité, tedy i $f\circ T \in \mathscr{C}_b(X)$, a proto

$$\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\nu^* = \lim_{j\to\infty}\int_X f\circ T\,\mathrm{d}\nu_{n_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_X f\circ T^{k+1}\,\mathrm{d}\nu.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,\mathrm{d}\nu^* - \int_X f\circ T\,\mathrm{d}\nu^*\right| &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_X \left\{f\circ T^k - f\circ T^{k+1}\right\}\mathrm{d}\nu\right|\\ &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{n_j}\left\{\int_X f\,\mathrm{d}\nu - \int_X f\circ T^{n_j}\,\mathrm{d}\nu\right\}\right|\\ &\leq \limsup_{j\to\infty}\frac{2}{n_j}\sup_X |f| = 0.\end{aligned}$$

Protože f byla libovolná, je invariance ν^* dokázána. Q.E.D.

Z důkazu je zřejmé, že větu 4.1 je možno vyslovit v následující podobě.

Věta 4.1bis. *Buď T spojité zobrazení polského prostoru X do sebe. Nechť existuje $\nu \in \mathscr{P}(X)$ tak, že množina měr*

$$\Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_{\#}^{k}\nu,\ n \geq 1\Big\}$$

je těsná. Pak existuje T-invariantní borelovská pravděpodobnostní míra ν^* na X.

Základní myšlenka důkazu věty 4.1 má velmi široké použití a může být snadno přenesena na systémy obecnější; ku příkladu, topologické předpoklady na prostor X nejsou příliš podstatné, jsou dány tím, jaká verse Prochorovovy věty je užita.

Věta 4.1 ovšem nezaručuje, že získáme netriviální invariantní míru: má-li třeba T pevný bod $x_0 \in X$, $Tx_0 = x_0$, pak volba $\nu = \delta_{x_0}$ vede k $\nu^* = \delta_{x_0}$. Krylov a Bogoljubov však ukázali, že pokud nějaké netriviální invariantní míry vůbec existují, procedurou z věty 4.1 je získat lze. Přesněji: je-li X kompaktní metrický prostor a $T\colon X \longrightarrow X$ spojité zobrazení, pak existuje $R \in \mathscr{B}(X)$ splňující

(i) $\mu(R) = 1$ pro každou T-invariantní $\mu \in \mathscr{P}(X)$,

(ii) pro každé $p \in R$ existuje limita

$$\operatorname*{w^*\text{-}lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_{\#}^{k}\delta_p = \mu_p$$

a μ_p je ergodická T-invariantní míra,

(iii) je-li $\mu \in \mathscr{P}(X)$ libovolná ergodická T-invariantní míra, pak $\mu = \mu_p$ pro nějaké $p \in R$,

(iv) pro libovolnou T-invariantní míru $\mu \in \mathscr{P}(X)$ platí

$$\mu(A) = \int_R \mu_p(A)\,\mathrm{d}\mu(p), \quad A \in \mathscr{B}(X).$$

Poslední rovnost lze interpretovat jako rozklad libovolné invariantní míry na ergodické komponenty. Speciálně, existuje-li jediná invariantní míra, je nutně ergodická.[49]

[49] Tvrzení (i)–(iv) mají smysl i mimo kontext spojitých zobrazení kompaktu do sebe. Z jednoznačnosti invariantní míry plyne její ergodičnost vždy, to jsme ukázali v poznámce 3.4(b). Též rozklad invariantní míry na ergodické komponenty platí za velmi slabých předpokladů, o tom se lze poučit třeba v § 6.1 knihy [20] M. Einsiedlera a T. Warda. Původní Krylovův a Bogoljubovův postup je však dodnes zajímavý, hezky je vyložen v poslední kapitole knihy [45] V. V. Němyckého a V. V. Stěpanova.