Standardní důkazy obou vět jsou založeny na jemné analyse spektrálních vlastností unitárního operátoru $U_T$ v $L^2(\mu;\mathbb{C})$, definovaného automorfismem $T$, $U_T f = f \circ T$.[86]

Podmínka (4.40) je zřejmě nutná: podle věty 3.10 je $T$ silně mixující, právě když

$$\lim_{n\to\infty} \big\langle U_T^n f, f \big\rangle = |\langle f, \mathbf{1}\rangle|^2$$

pro každou $f \in L^2(\mu)$, tím spíše musí platit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \big\langle U_T^n \xi_0, \xi_0 \big\rangle = |\langle \xi_0, \mathbf{1}\rangle|^2 = 0.$$

Připomeňme též diskusi v poznámce 3.11, z níž vyplývá, že podmínka (4.40) je díky Riemann-Lebesgueovu lemmatu splněna, kdykoliv je spektrální míra $\sigma$ procesu $\boldsymbol{\xi}$ absolutně spojitá vůči Haarově míře na $\mathbb{S}$.

Naznačme nyní elementární důkaz (založený na postupu K. Itôa, 1944) postačitelnosti podmínky (4.40), jehož myšlenku lze dosti jasně vyložit, byť precisní provedení by bylo pracnější. Položme

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) = \Big\{ g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m);\ \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \big(1 + \|x\|^k\big)\big|D^\alpha g(x)\big| < \infty\ \forall k \geq 0\ \forall \alpha \text{ multiindex} \Big\}.$$

Označme $\lambda_m$ Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^m$ normovanou předpisem $\lambda_m = (2\pi)^{-m/2}\lambda$. Pro každou funkci $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ je definována její Fourierova transformace $\hat{g}$,

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\mathrm{i}\langle x,\zeta\rangle} g(\zeta)\,\mathrm{d}\lambda_m(\zeta), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

a platí

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{\mathrm{i}\langle x,\zeta\rangle} \hat{g}(\zeta)\,\mathrm{d}\lambda_m(\zeta), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Zvolme $p \geq 1$, $n > p$, $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1})$ libovolně; označme $\boldsymbol{E}$ střední hodnotu vzhledem k míře $\mu$. Potom

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\big\{f(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+p}) g(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p)\big\} \\
&\qquad = \boldsymbol{E} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \exp\Big(\mathrm{i}\Big\{\sum_{k=0}^p u_k \xi_{n+k} + \sum_{k=0}^p v_k \xi_k\Big\}\Big) \hat{f}(u)\hat{g}(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \boldsymbol{E}\exp\Big(\mathrm{i}\Big\{\sum_{k=0}^p u_k \xi_{n+k} + \sum_{k=0}^p v_k \xi_k\Big\}\Big) \hat{f}(u)\hat{g}(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big\{\sum_{k,r=0}^p b_{k-r}(u_k u_r + v_k v_r) + \sum_{k,r=0}^p b_{n+k-r} u_k v_r\Big\}\Big) \\
&\qquad\qquad \times \hat{f}(u)\hat{g}(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v) \\
&\qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \int_{\mathbb{R}^{p+1}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k,r=0}^p b_{k-r}(u_k u_r + v_k v_r)\Big) \\
&\qquad\qquad \times \hat{f}(u)\hat{g}(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v),
\end{aligned}$$

[86] Jsou vyloženy např. v knize [32], §§ 8.2 a 14.2.

kde jsme postupně užili Fubiniho větu, vzorec pro Fourierovu transformaci gaussovské míry a předpoklad (4.40). Tedy

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}\big\{f(\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+p})g(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\big\}\\
&\qquad\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\exp\Big(-\frac12\sum_{k,r=0}^{p}b_{k-r}(u_ku_r+v_kv_r)\Big)\hat f(u)\hat g(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v)\\
&\qquad=\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\exp\Big(-\frac12\sum_{k,r=0}^{p}b_{k-r}u_ku_r\Big)\hat f(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\\
&\qquad\qquad\times\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\exp\Big(-\frac12\sum_{k,r=0}^{p}b_{k-r}v_kv_r\Big)\hat g(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v)\\
&\qquad=\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\boldsymbol{E}\exp\Big(\mathrm{i}\sum_{k=0}^{p}u_k\xi_k\Big)\hat f(u)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(u)\\
&\qquad\qquad\times\int_{\mathbb{R}^{p+1}}\boldsymbol{E}\exp\Big(\mathrm{i}\sum_{k=0}^{p}v_k\xi_k\Big)\hat g(v)\,\mathrm{d}\lambda_{p+1}(v)\\
&\qquad=\boldsymbol{E}f(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\boldsymbol{E}g(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p).
\end{aligned}
$$

Užitím hustoty $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{p+1})$ v $L^2(\mathbb{R}^{p+1})$ můžeme odvodit, že pro všechna $A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{p+1})$

$$\boldsymbol{E}\big\{\mathbf{1}_A(\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+p})\mathbf{1}_B(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\big\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\boldsymbol{E}\mathbf{1}_A(\xi_0,\dots,\xi_p)\boldsymbol{E}\mathbf{1}_B(\xi_0,\dots,\xi_p),$$

to jest

$$
\begin{aligned}
&\mu\big(\{(\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+p})\in A\}\cap\{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\in B\}\big)\\
&\qquad=\mu\big(T^{-n}\{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\in A\}\cap\{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\in B\}\big)\\
&\qquad\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu\{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\in A\}\mu\{(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_p)\in B\},
\end{aligned}
$$

z čehož silný mixing plyne díky lemmatu 3.6.

## § 11 – Řetězové zlomky

Značíce i nadále $\mathbb{I}=[0,1[$ uvažujme zobrazení

$$K\colon\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{I},\quad x\longmapsto\begin{cases}\left\{\dfrac1x\right\}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

a borelovskou pravděpodobnostní míru

$$\zeta(A)=\frac{1}{\log 2}\int_A\frac{\mathrm{d}x}{1+x},\qquad A\in\mathscr{B}(\mathbb{I}).$$

**Věta 4.20.** $(\mathbb{I},\mathscr{B}(\mathbb{I}),\zeta,K)$ *je silně mixující měřitelný dynamický systém.*

Míře $\zeta$ se někdy říká Gaussova míra, jelikož K. F. Gauss již v roce 1812 (v dopisu P.-S. Laplaceovi) uvedl, že

$$\lambda\big(K^{-m}[0,y[\big)\xrightarrow[m\to\infty]{}\zeta\big([0,y[\big)\quad\text{pro všechna } y\in\mathbb{I},\tag{4.41}$$

a zformulovat problém rychlosti konvergence v (4.41). Není známo, jak Gauss tvrzení (4.41) odvodil, první důkaz, spolu s odhadem rychlosti konvergence, předložil až R. O. Kuz'min v roce 1928. Gauss i Kuz'min ovšem problém formulovali v řeči theorie čísel, což není překvapivé, neboť zobrazení $K$ velmi těsně souvisí s theorií řetězových zlomků. Důkaz, že $K$ je silně mixující (dokonce, v terminologii poznámky 4.4, exaktní) i zajímavé důsledky věty 4.20 také znalost základů této theorie předpokládají. Proto nyní předložíme jen důkaz invariance míry $\zeta$, jenž je celkem elementární, a poté naznačíme aplikace věty 4.20 značně neformálním způsobem. Přesné formulace a důkazy jsou odsunuty do § 4 kapitoly 6, kde nejprve odvodíme potřebné poznatky o řetězových zlomcích.[87]

Lze si snadno rozmyslet, že Gaussovo tvrzení (4.41) implikuje invarianci míry $\zeta$, na druhou stranu, jak uvidíme, je (4.41) důsledek silného mixingu.

**Důkaz invariance míry $\boldsymbol{\zeta}$.** Podle lemmatu 1.1 je $\zeta$ $K$-invariantní míra, pokud

$$\zeta\big(K^{-1}[a,b[\big) = \zeta\big([a,b[\big)$$

pro každý interval $[a,b[ \subseteq \mathbb{I}$. Ježto $[a,b[ = [0,b[ \setminus [0,a[$, stačí ověřit, že

$$\zeta\big(K^{-1}[0,y[\big) = \zeta\big([0,y[\big) = \frac{1}{\log 2}\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{\log(1+y)}{\log 2}$$

pro všechna $y \in \mathbb{I}$.

Uvědomme si, že pro $x \in \,]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$, je $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, proto $Kx = \frac{1}{x} - n$ a $K$ zobrazuje $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ bijektivně na $\mathbb{I}$. Odtud plyne, že

$$K^{-1}\{z\} = \Big\{\frac{1}{z+n},\, n \geq 1\Big\} \quad \text{pro každé } z \in \,]0,1[, \quad K^{-1}\{0\} = \Big\{0,\, \frac{1}{n},\, n \geq 1\Big\}. \tag{4.42}$$

Zvolme $y \in \mathbb{I}$ libovolně pevně, potom podle (4.42)

$$K^{-1}[0,y[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big]\frac{1}{n+y}, \frac{1}{n}\Big] \cup \{0\},$$

tedy

$$\begin{aligned}
\zeta\big(K^{-1}\,[0,y[\big) &= \frac{1}{\log 2}\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n+y},\frac{1}{n}]} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+y}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+y}}\Big) \\
&= \frac{1}{\log 2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\log\Big(\frac{1+n}{n}\,\frac{n+y}{1+n+y}\Big) \\
&= \frac{1}{\log 2}\lim_{N\to\infty}\log\prod_{n=1}^{N}\Big(\frac{1+n}{n}\,\frac{n+y}{1+n+y}\Big)
\end{aligned}$$

---

[87] V češtině se lze o řetězových zlomcích poučit v klasické monografii [25] A. J. Chinčina. O vztahu řetězových zlomků a ergodické theorie je pojednáno kupříkladu v knihách P. Billingsleyho [9], § I.4, M. Einsiedlera a T. Warda [20], Chapter 3, K. Dajaniho a C. Kraaikampa [16], §§ 1.3, 3.5, 5.1, nebo M. Kesselböhmera, S. Munday a B. O. Stratmanna [31], *passim*. Jiným užitečným úvodem do problematiky jsou přednášky [35] S. Kristensena.