Kapitola 2

Matematický úvod

2.1 Opakování středoškolské látky, úvod do logiky a množin

Shrnutí kapitoly: *V této kapitole si zopakujeme středoškolskou látku, na kterou budeme následně navazovat. Zároveň si u důležitých objektů zavedeme značení, která budeme ve skriptech používat. Připomeneme si dvouhodnotovou logiku a základy teorie množin. Ukážeme si axiomatické zavedení reálných čísel a pomocí nich zavedeme i další číselné obory. Současně se naučíme porovnávat libovolné, tedy i nekonečné množiny. Upozorníme ale i na některé komplikovanější jevy, které jsou součástí základů matematiky. Ty nejsou a nemohou být tak průzračně jasné a nezpochybnitelné, jak se ještě počátkem 20. století někteří matematici a filozofové domnívali. Ukážeme si dokonce i tvrzení, která se nedají ani dokázat, ani vyvrátit.*

I přesto snad čtenáře přesvědčíme, že v matematice (a zejména v pokročilé) se všechna tvrzení zdůvodňují, stejně tak správné řešení příkladu obsahuje podrobný postup, který dokazuje správnost řešení. Důkazy používají definice, axiomy a již dokázaná tvrzení pospojovaná za pomoci matematické logiky. Volba důkazových prostředků odpovídá očekávané úrovni čtenáře. Práci nám zefektivňují různé symetrie (bývá například zvykem podrobně studovat jen vlastnosti suprema, vlastnosti infima se odvodí jen přechodem k množině zrcadlené přes počátek) a navazování na předešlé výsledky.

V této části budeme vycházet z toho, co by měl znát z matematiky absolvent střední školy. Například očekáváme, že čtenář má dobrou představu, co to je reálná osa, a umí s reálnými čísly zacházet. Na druhou stranu zavedeme o něco později reálná čísla sami. Přestože naše zavedení nevyžaduje žádné předběžné znalosti, ve skutečnosti vychází z toho, jak se na základní a střední škole s čísly pracuje. Podobně předpokládáme, že čtenář má nějaké povědomí o základech logiky a intuitivní představu o množinách. Některé pojmy upřesníme, upozorníme na jisté problémy, ale v této části nepůjdeme do žádných detailů, nebudeme vše dokazovat a na hlubší výsledky se odkážeme na příslušnou literaturu, kde se těmto věcem věnuje mnohem více prostoru.

Poznamenejme, že pro značení otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ budeme používat otevřené závorky, například $(0, 1)$, zatímco uzavřené intervaly značíme pomocí závorek hranatých, například $[0, 1]$. Analogicky pak pro polouzavřené intervaly.

2.1.1 Úvod do logiky

Budeme zásadně používat, tak jak je to v matematické analýze zvykem, *dvouhodnotovou logiku*. Pravdu budeme značit 1 nebo T (z anglického *true*) a nepravdu 0 nebo F (z anglického *false*). Budeme se zabývat jen *výroky*, tedy tvrzeními, o kterých má smysl říci, zda jsou pravdivé či nepravdivé. Budeme také pracovat s pojmem *výrokové funkce* neboli *predikátem*, tedy předpisem, který každému prvku z dané skupiny objektů přiřadí výrok.

Příklad 2.1.1. Výrok: Česká republika leží v Evropě.

Výroková funkce: $P(x)$: x leží v Evropě. Prvky x bereme z $M = \{$Francie, Indie, Kanada, Španělsko$\}$.

Komplikovanější výroky budeme vytvářet pomocí *logických spojek* definovaných následující pravdivostní tabulkou.

A	B	negace non A	konjunkce $A \wedge B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \Longrightarrow B$	ekvivalence $A \Longleftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Příklad 2.1.2. Výrok A: Česká republika leží v Evropě; výrok B: Česká republika je členem EU.
Negace A: Česká republika neleží v Evropě.
Konjunkce $A \wedge B$: Česká republika leží v Evropě a je (současně) členem EU.
Disjunkce $A \vee B$: Česká republika leží v Evropě nebo je členem EU.
Implikace $A \Longrightarrow B$: Česká republika leží v Evropě, proto je členem EU.
Implikace $B \Longrightarrow A$: Česká republika je členem EU, proto leží v Evropě.
Ekvivalence $A \Longleftrightarrow B$: Česká republika leží v Evropě právě tehdy, je-li členem EU.

Příklad 2.1.3. Výrok A: venku prší, výrok B: venku je mokro.
Implikace $A \Longrightarrow B$: Venku prší, proto je mokro.
Implikace $B \Longrightarrow A$: Venku je mokro, proto prší.

Vidíme, že z hlediska reálné zkušenosti (kterou v tomto okamžiku mlčky předpokládáme) je první implikace pravdivý výrok (pokud prší, pak je mokro), zatímco druhý výrok není pravdivý (může být mokro, aniž by pršelo). Je dobré se nad tímto rozdílem zamyslet.

Výroky jsou často doprovázeny *kvantifikátory*.

Označení 2.1.4. *Obecný kvantifikátor*: $\forall x \in M \quad P(x)$ (pro každý prvek x z množiny M platí výrok $P(x)$).

Existenční kvantifikátor: $\exists x \in M \quad P(x)$ (existuje prvek x z množiny M takový, že platí výrok $P(x)$).

Budeme také používat kvantifikátor jednoznačné existence značený $\exists!$.

V následujícím příkladu (stejně jako v několika dalších) pracujeme s některými číselnými obory. Předpokládáme, že čtenář má o nich jistou představu ze střední školy. Připomeňme, že $\mathbb{N}$ označuje přirozená čísla, $\mathbb{Z}$ čísla celá, $\mathbb{Q}$ čísla racionální, $\mathbb{R}$ čísla reálná a $\mathbb{C}$ čísla komplexní. Znak $\in$ čteme z, tj. $x \in M$ znamená x z M. Blíže si značení související s pojmem množina připomeneme níže.

Příklad 2.1.5. Výrok $\exists n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ je pravdivý výrok (lze vzít třeba $n = 4$). Naopak, výrok $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ je nepravdivý (uvažme například $n = 2$).

Při skládání kvantifikátorů lze prohodit dva ze sebou stojící stejné kvantifikátory, nikoliv dva různé.

Příklad 2.1.6. (i) $(\forall x < 0\, \forall y > 0 \quad x < y) \iff (\forall y > 0\, \forall x < 0 \quad x < y)$
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \quad n < m)$ není ekvivalentní s $(\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \quad n < m)$.

Snadno se nahlédne, že platí následující vztahy pro negaci výroku s kvantifikátorem.

Tvrzení 2.1.7. (i) $\operatorname{non}\big(\exists x \in M \quad P(x)\big) \iff \big(\forall x \in M \quad \operatorname{non} P(x)\big)$
(ii) $\operatorname{non}\big(\forall x \in M \quad P(x)\big) \iff \big(\exists x \in M \quad \operatorname{non} P(x)\big)$.

Ukažme například, že platí první ekvivalence, druhou pak ponecháme čtenáři k samostatnému rozmyšlení. Nechť je výrok $\operatorname{non}\big(\exists x \in M \quad P(x)\big)$ pravdivý. Pak neexistuje žádné $x \in M$ tak, že $P(x)$ je pravda, tj. $\forall x \in M$ je $P(x)$ nepravdivý. Analogicky se ukáže i druhá implikace.

Dvouhodnotová logika pracuje s následujícími zákony:
zákon sporu: pro žádný výrok A není zároveň pravda A a $\operatorname{non} A$
zákon vyloučení třetího: pro každý výrok A je buď A, nebo $\operatorname{non} A$ pravdivé.

Poznámka 2.1.8. Výše uvedené zákony jsou naší dohodou, že nebudeme používat výroky typu:

To, co teď říkám, není pravda.

Následující tvrzení plyne okamžitě z definic v pravdivostní tabulce (otestují se všechny volby pravdivosti výroků A, B, C).

Tvrzení 2.1.9. (i) $A \Longrightarrow A$
(ii) $\big((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)\big) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$
(iii) $A \iff A$
(iv) $(A \iff B) \iff (B \iff A)$
(v) $\big((A \iff B) \wedge (B \iff C)\big) \Longrightarrow (A \iff C)$
(vi) $\operatorname{non}(\operatorname{non} A) \iff A$
(vii) $(A \Longrightarrow B) \iff (\operatorname{non} B \Longrightarrow \operatorname{non} A)$
(viii) $(A \iff B) \iff (\operatorname{non} A \iff \operatorname{non} B)$
(ix) $(A \iff B) \iff (A \Longrightarrow B \wedge B \Longrightarrow A)$
(x) $\operatorname{non}(A \vee B) \iff (\operatorname{non} A \wedge \operatorname{non} B)$
(xi) $\operatorname{non}(A \wedge B) \iff (\operatorname{non} A \vee \operatorname{non} B)$
(xii) $\operatorname{non}(A \Longrightarrow B) \iff (A \wedge \operatorname{non} B)$
(xiii) $\operatorname{non}(A \iff B) \iff \big((A \wedge \operatorname{non} B) \vee (\operatorname{non} A \wedge B)\big)$.