Kapitola 4

Primitivní funkce

Shrnutí kapitoly: *Seznámíme se s pojmem primitivní funkce k dané funkci. Ukážeme si základní obecné techniky hledání primitivních funkcí (metoda per partes a substituční metoda) a seznámíme se s jistými třídami funkcí, pro něž v principu umíme primitivní funkce nalézt (racionální lomené funkce). Dále si představíme některé třídy funkcí, pro něž vhodnou substitucí převedeme hledání primitivní funkce k nim na hledání primitivní funkce racionální lomené funkce. Poté se seznámíme s některými jednoduchými typy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic a naučíme se je řešit. Nakonec si ukážeme souvislost těchto úloh s hledáním řešení některých typů lineárních diferenčních rovnic.*

V první části této kapitoly se budeme zabývat hledáním primitivních funkcí, což je přesně opačný proces, než je derivování. Nejjednodušší metody budou založeny na zkušenostech z derivování. Ukážeme si ale i pokročilejší metody.

4.1 Základní pojmy a příklady

Definice 4.1.1 (Primitivní funkce)**.** Nechť $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *primitivní funkcí* k f na (a,b), jestliže $F' = f$ na (a,b). Pak píšeme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 4.1.2. Vzhledem k tomu, že primitivní funkce k součtu funkcí je součet primitivních funkcí (dokážeme si níže), zřejmě pro komplexní funkci $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$ platí

$$\int f\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.1}$$

Proto není třeba primitivní funkce pro komplexní funkce studovat zvlášť, stačí dle vztahu (4.1.1) použít výsledky pro reálné funkce.

Poznámka 4.1.3. (i) Někdy se zavádí primitivní funkce na uzavřeném či polouzavřeném intervalu. Pak se navíc kontrolují odpovídající jednostranné derivace v hraničních bodech.

(ii) V definici primitivní funkce je důležité, že pracujeme na intervalu. Pak totiž dostáváme rozumné výsledky ohledně jednoznačnosti primitivní funkce, které jsou kompatibilní s teorií diferenciálních rovnic.
(iii) Daná funkce mít obecně primitivní funkci nemusí (třeba $x \mapsto \operatorname{sign} x$ na intervalu v $\mathbb{R}$, který obsahuje bod 0, zatím to ale neumíme dokázat).
(iv) I když primitivní funkce existuje, nemusí být vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí (toto je známo například o funkci $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$).
(v) Symbol pro primitivní funkci se často zkracuje na $\int f \,\mathrm{d}x$ nebo jen $\int f$. Tyto zkrácené tvary je však nutné používat opatrně, neboť například u vícerozměrné integrace musí čtenář poznat, podle kterých proměnných se právě integruje.
(vi) Někdy se místo primitivní funkce mluví o (neurčitém) integrálu. My se tomuto termínu budeme snažit vyhýbat a budeme důsledně mluvit o primitivní funkci. Nicméně funkci za $\int$ budeme nazývat *integrand*. O integrálu budeme mluvit v dalších kapitolách (Riemannově, Newtonově a Lebesgueově), výsledek dané operace nebude (na rozdíl od primitivní funkce) funkce, ale číslo.

Věta 4.1.4 (O nejednoznačnosti primitivní funkce). (i) *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b) a $C \in \mathbb{R}$, pak $F + C$ je také primitivní funkce k f na (a,b).*
(ii) *Jsou-li F a G primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + C$.*

Důkaz. První část se dokáže zderivováním. Důkaz druhé části zatím odložíme. (Z předpokladů plyne, že $(F - G)' = 0$. My ale zatím nevíme, že nulovou derivaci mají pouze konstanty.) □

Poznámka 4.1.5. Dodáme-li počáteční podmínku tvaru $F(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$, primitivní funkce je určena jednoznačně.

Příklad 4.1.6. Nalezněme primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$, která splňuje $F(1) = 4$. Předně máme $(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Odtud $(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})' = \sqrt{x}$. Tedy $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ je jednou z možných primitivních funkcí. Splňuje $G(1) = \frac{2}{3}$. Stačí tedy položit

$$F(x) = G(x) + 4 - G(1) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{3}.$$

Věta 4.1.7 (Spojitost primitivní funkce). *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), pak je na (a,b) spojitá.*

Důkaz. Primitivní funkce má ve všech bodech vlastní derivaci, a proto je v nich spojitá. □

Následující věta plyne z výsledků v předchozí kapitole (sekce věnované derivaci a elementárním funkcím).

Věta 4.1.8 (Přehled základních primitivních funkcí). *Platí*
(i) *nechť $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Pak $\int (x+a)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$ pro*

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \textit{pokud } a \notin \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} & \textit{pokud } a \in \mathbb{R}, n \geq 0 \\ x \in (-\infty,-a) \textit{ nebo } x \in (-a,\infty) & \textit{pokud } a \in \mathbb{R}, n \leq -2 \end{cases}$$

(ii) *nechť* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, *pak* $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *na* $(0,\infty)$
(iii) *nechť* $a \in \mathbb{R}$, *pak* $\int \frac{1}{x+a} \,\mathrm{d}x = \log|x+a| + C$ *na* $(-\infty,-a)$ *nebo na* $(-a,+\infty)$
(iv) $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(v) $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(vi) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(vii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$ *na* $\mathbb{R}$
(viii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$ *na* $(-1,1)$
(ix)$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x + C = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ *na* $\mathbb{R}$
(x) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x \cdot \operatorname{sign} x + C = \log(|x| + \sqrt{x^2-1}) \operatorname{sign} x + C$ *na* $(-\infty,-1)$ *nebo na* $(1,+\infty)$
(xi) $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(xii) $\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$ *na* $\mathbb{R}$
(xiii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$ *na* $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *pevným*
(xiv) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \cot x + C$ *na* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *s* $k \in \mathbb{Z}$ *pevným.*

Poznámka 4.1.9. (i) Do první části věty spadá například $\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$. Věta nám nabízí primitivní funkci $F_1(x) = -\frac{1}{x} + C_1$ na $(-\infty,0)$ nebo $F_2(x) = -\frac{1}{x} + C_2$ na $(0,+\infty)$. Primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$ nemůže existovat už jenom proto, že integrand není definován v počátku. Funkce

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{na } (-\infty,0) \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{na } (0,+\infty) \end{cases}$$

není primitivní funkcí na $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, neboť uvažovaná množina není interval. Na tomto případě je také vidět, proč se nám situace, kdy nepracujeme na intervalu, nelíbí. Máme zde dvě aditivní konstanty a případná počáteční podmínka nám pomůže určit jen jednu z nich.
(ii) Použitím Věty o nejednoznačnosti primitivní funkce (Věta 4.1.4) vidíme, že $\arctan x + \operatorname{arccot} x$ je konstantní na $\mathbb{R}$ a $\arcsin x + \arccos x$ je konstantní na $[-1,1]$. Ve druhém případě je ještě použitá spojitost obou funkcí na $[-1,1]$.

Uvažme situaci, kdy $f\colon (a,c) \to \mathbb{R}$, umíme najít primitivní funkce na podintervalech (a,b), (b,c) a integrand je definován v bodě b. Pak máme naději (nikoliv jistotu), že existuje primitivní funkce pro celý interval (a,c), která se získá takzvaným slepením dílčích primitivních funkcí. Věta o spojitosti primitivní funkce (Věta 4.1.7) nám říká, jak si mají odpovídat aditivní konstanty.

Úloha 4.1.10. Spočtěte $\int |x| \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Uvážíme dva případy. Na $(-\infty,0)$ máme

$$\int |x| \,\mathrm{d}x = \int -x \,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + C_1 =: F_1(x)$$

a na $(0,\infty)$ platí

$$\int |x| \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_2 =: F_2(x).$$