Kapitola 7

Newtonův a Riemannův integrál

Shrnutí kapitoly: *Seznámíme se se dvěma typy integrálů: s integrálem Newtonovým a integrálem Riemannovým. U druhého typu integrálu si ukážeme dvě metody jeho zavedení, což nám zjednoduší důkazy některých jeho vlastností. Ukážeme si také, jak oba integrály spolu souvisí. Dále se seznámíme s některými pokročilými nástroji, jako například s obecným tvarem druhé věty o střední hodnotě. Pro integrál Newtonův se naučíme různé metody jak určit bez výpočtu integrálu, zda integrál konverguje či diverguje. Nakonec si uvedeme některé základní aplikace Riemannova integrálu: výpočet obsahu plochy pod křivkou a výpočet délky křivky.*

Pojem integrálu (někdy nepřesně nazývaný „integrálem určitým“) patří k nejdůležitějším pojmům matematické analýzy a v jejích aplikacích se používá velice často. V této kapitole se seznámíme se dvěma typy integrálu, Newtonovým a Riemannovým, později pak ještě s integrálem Lebesgueovým.

Uvažujme následující úlohu. Mějme hmotnou tyč se zadanou lineární hustotou $\varrho(x)$, $x \in [a, b]$. Cílem je najít hmotnost tyče. Je-li $\varrho = konst$, pak $m = \varrho(b - a)$. Není-li ϱ konstantní, pak máme následující možnosti.

a) Vezměme $x \in (a, b]$ a předpokládejme, že (případně myšlenkovým) pokusem umíme určit hmotnost části tyče $[a, x]$ pro všechna $x \in (a, b]$, tedy umíme určit $m(x)$. Potom pro $b \geq y > x > a$ je „střední“ hodnota lineární hustoty na úseku mezi x a y

$$\varrho_{mean} = \frac{m(y) - m(x)}{y - x},$$

proto

$$\varrho(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{m(y) - m(x)}{y - x} = m'(x),$$

tedy $\varrho(x) = m'(x)$. Dostáváme

$$m_{total} = \int m'(x)\, \mathrm{d}x|_{x=b} - 0(= m(a)),$$

což lze psát jako

$$m_{total} = \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x|_{x=b} - \int \varrho(x)\,\mathrm{d}x|_{x=a},$$

tedy jako rozdíl primitivních funkcí v bodě b a a (a proto nevzniká problém s integrační konstantou, ta se odečte). Toto je podstata *Newtonova integrálu*, je-li F primitivní funkce k f, pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

b) Pokusme se nyní postupovat jinak. Představme si, že umíme rozdělit tyč na malé části a přibližně spočítáme hmotnost každé části tyče (mezi x a $x + \Delta x$) jako

$$\Delta m_i = \varrho(x_i)(\Delta x)_i, \qquad x_i \in [x, x + (\Delta x)_i], \text{ libovolné.}$$

Potom $m_{approx} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i)(\Delta x)_i$, je-li tyč rozdělena na n dílků, přičemž $x_i \in [x, x + (\Delta x)_i]$ je libovolné. Očekáváme, že když $n \to +\infty$ (a současně $(\Delta x)_i \to 0_+$), pak se bude m_{approx} blížit ke skutečné hmotnosti tyče, tedy

$$m_{total} = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i)(\Delta x)_i.$$

Počítáme vlastně obsah pod grafem funkce $x \mapsto \varrho(x)$. Toto je základem *Riemannova integrálu*, tedy

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{(\Delta x)_i \to 0_+} \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i)(\Delta x)_i.$$

Uvidíme později, že pro „rozumné funkce“ dávají oba integrály tutéž hodnotu.

c) Poslední typ integrálu se kterým se v tomto kurzu seznámíme, tedy integrál Lebesgueův, je založen na myšlence měřit přesně velikost množin, na kterých naše funkce nabývá jednotlivých hodnot. Proto se dá velice jednoduše zobecnit na integrál nad vícerozměrnými množinami. Teď se ale tomuto velice důležitému pojmu nebudeme více věnovat.

Nabízí se otázka, proč nestačí integrál jeden a proč tedy zavádíme integrály tři (ve skutečnosti jich existuje ještě mnohem více). Riemannův integrál, jak uvidíme zanedlouho, má přirozenou geometrickou interpretaci: jde vlastně o obsah plochy pod grafem funkce $x \mapsto f(x)$, jejíž integrál počítáme. Stejně tak nám přirozeně vyplynou další aplikace, budeme se věnovat podrobněji délce křivky, další jsou pak uvedeny v Appendixu D. Má ale i své nevýhody. Při jeho zavedení požadujeme omezenost funkce i intervalu, přes který integrujeme. Navíc se obtížně počítá přímo z definice.

Tyto nevýhody odstraňuje integrál Newtonův, který úzce souvisí s tím, co již známe, totiž s hledáním primitivní funkce k zadané funkci. Jak jsme ale viděli, někdy najít primitivní funkci na třídě elementárních funkcí neumíme, a to i v případě relativně jednoduchých elementárních funkcí (například $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$). Tento integrál (na rozdíl od Riemannova, kde to lze, ale výsledek není plně uspokojující) také nelze přímočaře rozšířit na integrál přes vícerozměrné oblasti. Navíc v případě, kdy je daná funkce nespojitá ve spočetně mnoha bodech na omezeném intervalu (jako například Riemannova funkce, která má Riemannův integrál), Newtonův integrál neexistuje. Také, jako třeba pro Dirichletovu funkci, pro některé funkce neexistuje ani jeden z těchto integrálů. Konečně mnohé věty, které bychom občas potřebovali (například prohození limity a integrálu) se pro tyto integrály těžko dokazují a předpoklady těchto vět jsou hodně vzdálené od těch optimálních.

Proto se zavádí další z integrálů, Lebesgueův integrál. I ten má své problémy, ale těm se budeme věnovat až ve třetím díle skript. Teď jen poznamenejme, že vyžaduje hlubší matematické znalosti, na které ještě nejsme připraveni, a celý postup jeho zavedení je poměrně myšlenkově náročný. Umožňuje ale poměrně přímočaré zobecnění pro integraci funkcí více proměnných. Na druhou stranu, pokud jej opravdu chceme vyčíslit, většinou se pomocí hlubších vlastností nakonec dopracujeme k výpočtu Newtonova integrálu přes jednorozměrný interval, a proto potřebujeme umět zacházet s všemi třemi integrály.

7.1 Zavedení Newtonova integrálu

Definice 7.1.1 (Zobecněná primitivní funkce)**.** Nechť $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *zobecněnou primitivní funkcí* k f na (a,b), jestliže
(i) F je spojitá na (a,b)
(ii) $F' = f$ na $(a,b) \setminus K$, kde $K \subset (a,b)$ splňuje podmínku

$$K \cap (-n, n) \text{ je konečná množina kdykoliv } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 7.1.2. (i) Pokud je (a,b) omezený interval, připouštíme jen konečnou množinu K. Pokud $(a,b) = \mathbb{R}$, lze připustit třeba $K = \mathbb{Z}$.
(ii) Je-li F primitivní funkcí k f na (a,b), je automaticky také zobecněnou primitivní funkcí.
(iii) Funkce $F(x) = |x|$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci sign na $\mathbb{R}$, ale není její primitivní funkcí, neboť neexistuje $F'(0)$ (tedy F nemůže být na intervalu obsahujícím bod 0 primitivní funkcí ani k žádné jiné funkci). Obráceně, funkce sign nemůže být derivací žádné funkce na intervalu obsahujícím bod 0, neboť nesplňuje Darbouxovu vlastnost.
(iv) Dirichletova funkce nemůže mít zobecněnou primitivní funkci, neboť pak by na jednotlivých intervalech tvořících $(a,b) \setminus K$ musela mít Darbouxovu vlastnost (připomeňme Definici 6.2.7).

Poznámka 7.1.3. Funkce se nazývá *po částech konstantní* na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, je-li možno (a,b) rozdělit na konečný počet podintervalů, na nichž je funkce konstantní.

Tvrzení 7.1.4. (i) *Je-li F zobecněná primitivní funkce k f na (a,b) a $C \in \mathbb{R}$, pak $F + C$ je také zobecněná primitivní funkce k f na (a,b).*
(ii) *Jsou-li F a G zobecněné primitivní funkce k f na (a,b), pak existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že $G = F + C$.*
(iii) *Je-li F_1 zobecněná primitivní funkce k f na (a,b), F_2 zobecněná primitivní*