Kapitola 9

Číselné řady

Shrnutí kapitoly: *V této kapitole si vysvětlíme pojmy (číselná) řada, konvergentní/oscilující/divergentní řada, absolutně a neabsolutně konvergentní řada. Cílem nebude naučit se řady sčítat, ale spíše rozlišit, zda má řada konečný součet, či ne. Nejprve se podrobně seznámíme s kritérii na důkaz konvergence a divergence řad s nezápornými členy a poté se základními kritérii pro vyšetřování neabsolutní konvergence řad. Okrajově se budeme věnovat i násobení řad a cesarovské sčítatelnosti řad. Cílem této kapitoly je především se připravit na aplikačně mnohem zajímavější kapitoly věnované mocninným a obecným funkčním řadám.*

9.1 Základní pojmy

Definice 9.1.1 (Řada)**.** Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ je posloupnost. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ budeme nazývat *(číselnou) řadou.* Pro $k \in \mathbb{N}$ se číslo a_k nazývá *k-tý člen*, číslo $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ se nazývá *n-tý částečný součet* a $\{s_n\}$ nazveme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Existuje-li vlastní $s := \lim_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že řada *konverguje.* Pokud je uvedená limita nevlastní, řada *diverguje*, a pokud limita částečných součtů neexistuje, řada *osciluje.*

V prvních dvou případech číslo s nazýváme *součtem řady.* Píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Poznámka 9.1.2. V případě, kdy s existuje, má symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vlastně dva významy. Jednak zastupuje posloupnost, kterou se snažíme sečíst, jednak její součet (tedy číslo). Bývá zvykem v takovéto situaci přednostně chápat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jako číslo s.

Poznámka 9.1.3. V některých situacích bude přirozené pracovat s $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Nazývejme posloupností rovněž zobrazení z $\mathbb{N}_0$ do $\mathbb{R}$ (opět budeme psát $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ či jen $\{a_k\}$).

Poznámka 9.1.4. Řady komplexních čísel se definují analogicky. Nebude-li řečeno jinak, v dalším se budeme zabývat řadami reálných čísel. Odvození podobných výsledků pro komplexní řady přenecháváme čtenáři jako cvičení, popřípadě budou okomentovány zvlášť.

Příklad 9.1.5. (i) Nechť $q \in \mathbb{C}$ a $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ definujme $a_k = a_0 q^k$. Vzniklá řada se nazývá *geometrická řada* a díky identitě

$$(1 + q + \cdots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1} \qquad \text{platné pro každé } n \in \mathbb{N}$$

její částečné součty splňují pro $q \neq 1$

$$s_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Platí-li $|q| < 1$, řada konverguje a dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$. Pokud $q = 1$, pracujeme s řadou $\sum_{k=0}^{\infty} a_0$ a dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 = \infty \in \mathbb{C}^*$. Pokud $|q| = 1$ a $q \neq 1$, řada osciluje. Konečně, pro $|q| > 1$ dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \infty \in \mathbb{C}^*$ (reálný případ vyžaduje ohlídání jak $\operatorname{sign} a_0$ tak $\operatorname{sign} q$, pro $q < -1$ řada osciluje).
(ii) Uvažme *harmonickou řadu* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Její částečné součty tvoří monotonní posloupnost, mají tedy limitu v $\mathbb{R}^*$. Platí pro ně

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{2}$$
$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

a indukcí lze získat $s_{2^n} > \frac{n+2}{2}$. Odtud $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Připomeňme ještě, že v kapitole o Newtonově a Riemannově integrálu jsme divergenci této řady už ukázali takto

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > (\mathcal{R}) \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

(iii) Dalším typem řad, které umíme sečíst, jsou *teleskopické řady*. Příkladem je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, pro kterou máme

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1. \end{aligned}$$

Obecně pro teleskopickou řadu typu

$$a_k = b_k - b_{k+m} \qquad \text{kde } m \in \mathbb{N} \text{ a } \lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

máme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+m}) = b_1 + \cdots + b_n - (b_{m+1} + \cdots + b_{m+n}) \overset{n\to\infty}{\to} b_1 + \cdots + b_m.$$

(iv) Uvažme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Opět se jedná o řadu s nezápornými členy, proto jsou částečné součty monotonní a existuje jejich limita. Navíc máme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Big) = 2 - \frac{1}{n},$$

odkud dostáváme konvergenci řady. Dalo by se také postupovat přes $(\mathcal{N}) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$.
(v) Uvažme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Částečné součty si přepišme do tvaru

$$s_{2n} = \Big(-1 + \frac{1}{2} \Big) + \Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Big) + \ldots \Big(-\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \Big)$$

a

$$s_{2n+1} = -1 + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Big) + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \Big) + \ldots \Big(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \Big).$$

Odtud vidíme, že $\{s_{2n}\}$ a $\{s_{2n+1}\}$ jsou monotonní posloupnosti s členy v intervalu $[-1, 0]$ (neboť vždy $-1 < s_{2n+1} < s_{2n} < 0$). Obě tedy musí být konvergentní. Navíc

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

a proto mají obě limity stejnou hodnotu. Zkoumaná řada tedy konverguje. Rozmyslete si, že v této situaci není možné použít přístup přes Newtonův integrál.

Poznámka 9.1.6. Konvergence řady byla definována jako konvergence jejích částečných součtů. Nabízí se tedy myšlenka, že budeme-li studovat limitní chování posloupnosti s_k, získáme tím nejen informaci o konvergenci studované řady, ale i její součet. Žádnou teorii pro řady by pak nebylo nutné budovat, neboť vystačíme s teorií pro limity posloupností. Velice často však bývá obtížné či nemožné z předpisu pro k-tý člen a_k získat vzorec pro s_k (ve vzácných případech se podle chování prvních několika členů posloupnosti $\{s_k\}$ dá odhadnout správný vzorec, ten se pak dokáže indukcí). V dalším se nebudeme snažit vzorce pro s_k hledat a budeme budovat teorii pracující jen s předpisem pro člen a_k.

Poznámka 9.1.7. Povšimněte si, že na konvergenci řady nemá vliv přidání, vynechání či změna hodnoty u konečného počtu členů.

Nejprve si uvedeme kritérium, pomocí něhož konvergenci vylučujeme.

Věta 9.1.8 (Nutná podmínka konvergence řady)**.** *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Pak* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.