Kapitola 12

Diferenciální počet funkcí více proměnných

Shrnutí kapitoly: *V této kapitole se budeme věnovat diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných. Cílem je co nejvíce výsledků získaných pro funkce jedné reálné proměnné převést na případ funkcí více reálných proměnných. Seznámíme se s pojmy parciální derivace, směrová derivace a totální diferenciál. Vyjasníme si, v jakém vztahu jsou tyto pojmy navzájem. Pro parciální derivace vyšších řádů zjistíme, kdy se změnou pořadí derivování nezmění výsledek. Roli primitivní funkce pak hraje potenciál vektorového pole, který ale neexistuje pro libovolnou hladkou funkci. Seznámíme se s podmínkami, které existenci potenciálu zajišťují, a ukážeme si aplikace při řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Naučíme se také hledat lokální extrémy funkcí více proměnných. Zásadním výsledkem pro nás bude Věta o implicitní funkci. Ta nám pomůže při důkazu tvrzení o Lagrangeových multiplikátorech (důležitý nástroj při hledání globálních extrémů na kompaktních množinách), ale i při důkazu Věty o regulárním zobrazení, která nám zaručuje invertovatelnost jisté třídy vektorových funkcí více proměnných.*

V této kapitole budeme používat následující značení. Bod $x \in \mathbb{R}^N$ budeme značit standardním fontem, vektor v $\mathbb{R}^N$ tučně. Když k bodu přičteme vektor, získáme opět bod, tedy $x + \mathbf{h} = y$. Vektorové funkce, chápané jako zobrazení z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^N$, budeme značit též tučně, tedy například $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, kde $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$. Na druhou stranu, vektorové funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^m$, kde m bude libovolné, ne nutně rovno N, budeme značit pomocí šipky, tedy například $\vec{f}$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$, kde $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Konečně matice typu $N \times N$ budeme značit speciálním fontem, například $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$.

12.1 Parciální derivace, derivace ve směru, totální diferenciál

V kapitole o metrických prostorech jsme se již zabývali limitou a spojitostí funkcí více proměnných. Nyní se budeme zabývat problémy souvisejícími s derivováním. Nejprve si připomeneme definici parciální derivace, kterou jsme si již představili. Pak přistoupíme k novým pojmům.

Definice 12.1.1 (Parciální derivace)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na množině $\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{i-1}\} \times (a_i - \delta, a_i + \delta) \times \{a_{i+1}\} \times \cdots \times \{a_N\}$ pro jisté $\delta > 0$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_N) - f(a)}{h},$$

pak se nazývá *parciální derivace* funkce f podle i-té proměnné v bodě a a značí se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_i}(a)$. *Druhá parciální derivace* podle proměnných x_i a x_j je definována vztahem $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ (pokud má výraz smysl) a značí se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ nebo $f_{x_j x_i}(a)$. Pokud $i = j$, první verze zápisu se zkracuje na $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. Pokud $i \neq j$, hovoříme o *smíšené parciální derivaci*. Analogicky pro vyšší parciální derivace.

Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřenou a $k \in \mathbb{N}_0$ značí $C^k(\Omega)$ množinu funkcí, které mají spojité všechny parciální derivace až do řádu k na Ω. Opět zavádíme

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega).$$

Poznámka 12.1.2. Je-li $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ kanonická báze v $\mathbb{R}^N$, definiční vztah pro parciální derivaci lze psát jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\mathbf{e}_i) - f(a)}{h}.$$

Poznámka 12.1.3. Protože pojem parciální derivace byl zaveden za pomoci funkce jedné reálné proměnné a její derivace, okamžitě máme k dispozici aritmetiku (vlastní derivace) a v některých jednoduchých (jednodimenzionálních z hlediska vnitřní funkce) případech máme také k dispozici Větu o derivaci složené funkce (Věta 3.3.14). Pro obecný případ derivace složené funkce si později odvodíme takzvané *řetízkové pravidlo.*

Příklad 12.1.4. (i) Nechť $f(x, y) = x^2 + y^2$ na $\mathbb{R}^2$. Pak zde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

a rovněž libovolná parciální derivace řádu 3 a více je identicky nulová. Vidíme také, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
(ii) Nechť $f(x, y) = x \sin(xy)$ na $\mathbb{R}^2$. Pak zde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy) \qquad a \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(xy).$$

Opět se dá nahlédnout, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
(iii) Nechť $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$ na $\mathbb{R}^2$. Pak přímý výpočet (pomocí aritmetiky derivace) dává

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \qquad \text{kdykoliv } x \neq 0.$$

Označíme-li nyní pro zafixované $y \in \mathbb{R}$ funkci g: $x \mapsto f(x,y)$, pak g je spojitá na $\mathbb{R}$ a Věta o limitě derivací (Věta 6.3.10) dává

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } y = 0 \\ \operatorname{sign} y \cdot \infty & \text{pro } y \neq 0. \end{cases}$$

Protože pojem parciální derivace připouští jen konečná čísla, máme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y \neq 0$. Uvedené parciální derivace jsme také mohli počítat přímo z definice a dostat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

a pro $y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(yh)^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = y^{\frac{1}{3}} \cdot \infty,$$

tedy tato parciální derivace neexistuje. Pro druhou parciální derivaci podle x máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}} \qquad \text{kdykoliv } x \neq 0.$$

Snadno opět získáme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$. V bodech tvaru $(0,y)$, $y \neq 0$, neexistuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ už jenom proto, že tam neexistuje $\frac{\partial f}{\partial x}$. Analogické výsledky platí pro parciální derivaci podle y. Snadno se nahlédne, že $f \in C(\mathbb{R}^2)$ a pro každou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ platí

$$f \in C^1(\Omega) \quad \iff \quad f \in C^\infty(\Omega) \quad \iff \quad \Omega \text{ neprotíná osový kříž.}$$

Zobecněním parciální derivace je následující pojem.

Definice 12.1.5 (Derivace ve směru)**.** Nechť vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, bod $a \in \mathbb{R}^N$ a funkce $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na množině $\{a + h\mathbf{v}\colon h \in (-\delta, \delta)\}$ pro jisté $\delta > 0$. Pak definujeme *derivaci* funkce f *ve směru* $\mathbf{v}$ v bodě a předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\mathbf{v}) - f(a)}{h},$$

pokud limita na pravé straně existuje a je vlastní.

Úloha 12.1.6. Nechť $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0)$ a $a = (1,1)$. Spočtěte parciální derivace a směrové derivace v zadaných směrech funkce f v bodě a.