Kapitola 13

Klasický variační počet

Shrnutí kapitoly: *Cílem této kapitoly je seznámit se s aplikacemi již získaných výsledků z tohoto dílu skript na jednu třídu úloh užitečných v mechanice. Konkrétně jde o aplikaci teorie metrických prostorů a obyčejných diferenciálních rovnic a cílem bude seznámit se se základy variačního počtu. Jde vlastně o zobecnění hledání extrémů funkcí více proměnných na případ nekonečnědimenzionálních prostorů, roli funkcí hrají funkcionály, prvky definičního oboru jsou funkce z nějakého podprostoru spojitě diferencovatelných funkcí, místo algebraických rovnic řešíme obyčejné diferenciální rovnice a hledaným objektem jsou funkce. Nejprve si představíme základní pojmy, včetně Gateauxova a Fréchetova diferenciálu (zobecňuje pojmy směrové derivace a totálního diferenciálu). Dále se budeme věnovat už jen speciálnímu typu funkcionálů, který lze reprezentovat pomocí integrálu z hladké funkce, která závisí na funkci jedné reálné proměnné a její derivaci, a hledáme minimum tohoto funkcionálu na třídě funkcí splňující předepsané okrajové podmínky. Důležitým nástrojem pro nás bude Euler–Lagrangeova rovnice, kterou lze za jistých předpokladů odvodit z nulovosti Gateauxova diferenciálu. Ukážeme si různé speciální případy této rovnice a metody jejího řešení a také nutné a postačující podmínky, kdy je řešení této rovnice hledaným minimem. Dále si ukážeme metodu Lagrangeových multiplikátorů, která umožňuje řešit úlohy s vazbou. Poté si představíme řešení několika klasických úloh variačního počtu (problém princezny Dido, úloha o brachystochroně, o zavěšeném řetězu aj.). Na závěr se budeme věnovat aplikacím variačního počtu v klasické mechanice hmotných bodů, kde si pomocí Legendreovy transformace ukážeme ekvivalentní formulaci Lagrangeových rovnic mechaniky reprezentované rovnicemi Hamiltonovými.*

13.1 Úvod

Stejně jako bylo přirozené rozšířit teorii extrémů funkcí jedné reálné proměnné na teorii extrémů funkcí více proměnných, existují aplikace vyžadující ještě obecnější přístup. Budeme se zabývat extrémy v nekonečnědimenzionálních prostorech, jejichž prvky jsou funkce. Jako motivaci si uveďme následující příklad.

Příklad 13.1.1 (Úloha o brachystochroně)**.** Nechť $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A > B$. Naším cílem je nalézt trajektorii, po níž se hmotný bod vlivem působení gravitace co nejrychleji dostane z bodu (a, A) do bodu (b, B) (jiná interpretace: mezi oběma body vyrobíme skluzavku a necháme po ní sklouznout kuličku, přičemž zanedbáváme tření a předpokládáme, že kulička klouže, nekutálí se, nebo její moment setrvačnosti je zanedbatelný). Bereme-li do úvahy jen trajektorie, které je možné popsat jako graf $C^1([a, b])$-funkce, pak pro celkový čas máme

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)} \,\mathrm{d}x,$$

přičemž integrál budeme brát buď Newtonův, nebo, pokud je to možné, i jako Riemannův. Toto platí pro celou kapitolu a nebudeme se k tomu již více vracet. Vyjádření rychlosti v získáme ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2} m v^2(x) + m g y(x) = m g A \qquad \Longrightarrow \qquad v(x) = \sqrt{2g(A - y(x))}.$$

Celkově minimalizujeme funkcionál

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{A - y(x)}} \,\mathrm{d}x$$

přes funkce z $C^1([a, b])$ splňující $y(a) = A$ a $y(b) = B$. Všimněme si ještě, že díky počáteční podmínce $y(a) = A$ nelze integrál uvažovat jako Riemannův.

Definice 13.1.2 (Funkcionál)**.** Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál*.

Příklad 13.1.3. (i) Délka grafu funkce

$$F(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \,\mathrm{d}x$$

je funkcionál na $C^1([a, b])$ (připomeňme ještě, že na $C^1([a, b])$ je zvykem zavádět normu $\|y\|_{C^1([a,b])} := \max_{[a,b]} |y| + \max_{[a,b]} |y'|$).
(ii) Riemannův (či Newtonův) integrál z funkce f je dokonce lineární funkcionál na $C([a, b])$.
(iii) Funkcionálem na $C^1([a, b])$ je také

$$F(y) = \sqrt{\int_a^b y'^2(x) \,\mathrm{d}x}.$$

V dalším si nejprve vybudujeme abstraktní teorii pro klasifikaci lokálních extrémů, která se velmi podobá teorii pro lokální extrémy funkcí více proměnných. Později při aplikaci této teorie zjistíme, že kupříkladu ověřování pozitivní definitnosti druhého diferenciálu v nekonečné dimenzi není vůbec snadné a vyžaduje vybudování nových nástrojů. Právě toto rozšíření abstraktní teorie bude těžistěm této kapitoly. Nakonec se budeme zabývat několika klasickými úlohami, jako jsou již zmíněná úloha o brachystochroně či úloha o zavěšeném řetězu.

Naše teorie bude pracovat s prostorem $C^1([a,b])$. Na rozdíl od případu extrémů funkcí více proměnných se nám podaří získat jen velmi slabé výsledky ohledně existence globálních extrémů. Konkrétně bude zcela chybět výsledek, který by byl svou užitečností srovnatelný s Větou o nabývání extrémů spojitou funkcí (Věta 11.9.18), tj. že spojitá funkce na omezené a uzavřené (tedy kompaktní) množině nabývá svého maxima a minima (v nekonečnědimenzionálním prostoru omezenost a uzavřenost neimplikují kompaktnost). Moderní matematická analýza z těchto důvodů prostor $C^1([a,b])$ nahrazuje takzvanými *Sobolevovými prostory*, které jsou vybudovány na teorii *Lebesgueova integrálu* a z hlediska variačního počtu nabízejí silnější výsledky. Tyto partie jdou ale nad rámec těchto skript.

13.2 Abstraktní teorie

Protože v prostorech funkcí nemáme přirozeně danou kanonickou bázi, základním pojmem diferenciálního počtu je derivace ve směru.

Definice 13.2.1 (Gateauxův a Fréchetův diferenciál)**.** Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_F$.
(i) Nechť $h \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + th\colon |t| < \delta\} \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Gateauxův diferenciál* ve směru h (nebo též *Gateauxovu derivaci* ve směru h), jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(a+th)|_{t=0}.$$

Tuto limitu pak značíme $\delta F(a;h)$ a nazýváme ji *Gateauxovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a ve směru h.
(ii) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Fréchetův diferenciál*, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál $L\colon X \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Lh}{\|h\|_X} = 0.$$

Zmíněný lineární funkcionál pak značíme $\mathrm{d}F(a)$ a nazýváme jej *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a.

Poznámka 13.2.2. (i) Snadno se ověří, že Gateauxův diferenciál (v daném bodě a směru) a Fréchetův diferenciál (v daném bodě) jsou v případě existence určeny jednoznačně.