

# Kapitola 10

## Rovnice vázaných vln

V předchozích kapitolách jsme viděli, jak nelineární odezva látky na intenzivní laserový svazek vytváří nové frekvenční komponenty polarizace. Tyto nové členy polarizace jsou pak zdrojem nových frekvencí (svazků) elektromagnetického (EM) pole. V této kapitole si pomocí Maxwellových rovnic popíšeme generaci, šíření a interakci nových komponent EM pole.

### 10.1 Nelineární vlnová rovnice

Vyjdeme z Maxwellových rovnic pro dielektrikum

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (10.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (10.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.4)$$

Nejprve provedeme rotaci rovnice (10.3), použijeme materiálový vztah pro nemagnetickou látku  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , dosadíme vztah (10.4) a získáme

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.5)$$

Vyjádříme elektrickou indukci  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  a dostaneme obecný tvar nelineární vlnové rovnice

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (10.6)$$

Tento tvar můžeme za určitých předpokladů a přiblížení zjednodušit. Použijeme vektorovou identitu  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ . V lineární optice v izotropním prostředí je první člen na pravé straně identity nulový. V nelineární optice sice nulový není díky složitějšímu vztahu mezi  $\vec{E}$  a  $\vec{D}$ , ale bývá malý, takže ho dále budeme zanedbávat.

Pro přehlednost si polarizaci  $\vec{P}$  rozdělíme na lineární  $\vec{P}_L$  a nelineární část  $\vec{P}_{NL}$

$$-\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (10.7)$$

Uvážením, že v izotropním prostředí pro lineární část elektrické indukce platí  $\vec{D}_L = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_L = \varepsilon_L \vec{E}$ , dostaneme vlnovou rovnici<sup>1</sup>

$$-\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_L \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (10.8)$$

Nelineární odezva látky (pravá strana rovnice) se tak stává zdrojem komponent EM pole (levá strana rovnice).

Nyní si z nelineární vlnové rovnice odvodíme tzv. *rovnice vázaných vln*, které popisují vzájemnou interakci optických vln prostřednictvím nelineární polarizace látky. Vlnová rovnice platí pro každou frekvenční složku pole. Budeme předpokládat monochromatické rovinné vlny, bezztrátové prostředí a problém budeme řešit v jedné dimenzi, ve směru osy  $z$ .

Pokud bude zdrojový člen s nelineární polarizací nulový, řešením vlnové rovnice (10.8) je rovinná harmonická vlna

$$E_i(z, t) = A_i(z) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + c.c. \quad (10.9)$$

V případě, že člen s nelineární polarizací nebude příliš velký, můžeme očekávat, že u rovinné vlny ovlivní pouze pomalu se měnící obálku  $A_i(z)$ . Dosazením předpokládaného řešení (10.9) a nelineární polarizace  $P_{NL}(t) = P_{NL}(\omega_i) e^{-i\omega_i t} + c.c.$  do rovnice (10.8), provedením derivací a odečtením dvou stejných členů dostaneme

$$-\frac{d^2 A_i}{dz^2} - 2ik_i \frac{dA_i}{dz} = \mu_0 \omega_i^2 P_{NL}(\omega_i) e^{-ik_i z}. \quad (10.10)$$

---

<sup>1</sup>dále již nebudeme zdůrazňovat lineární permitivitu indexem  $L$

První člen oproti druhému můžeme zanedbat (aproximace pomalu měnící se obálky), protože relativní změna amplitudy  $A_i$  na vzdálenosti vlnové délky je mnohem menší než 1. Při úpravě využijeme přepočty  $k_i = n_i \omega_i / c$ ,  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  a  $\varepsilon_r = n^2$ . Výsledkem je diferenciální rovnice platící pro všechny vlny

$$\frac{dA_i}{dz} = \frac{i\omega_i}{2\varepsilon_0 c n_i} P_{NL}(\omega_i) e^{-ik_i z} = \frac{ik_i}{2\varepsilon_i} P_{NL}(\omega_i) e^{-ik_i z}. \quad (10.11)$$

## 10.2 Součtová frekvence

Nyní si odvodíme rovnice vázaných vln pro konkrétní nelineární proces, a to generaci součtové frekvence. Nelineární polarizace na jednotlivých frekvencích mají u součtové frekvence tvar

$$P_1(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) = 4\varepsilon_0 d A_3 e^{ik_3 z} A_2^* e^{-ik_2 z}, \quad (10.12)$$

$$P_2(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) = 4\varepsilon_0 d A_3 e^{ik_3 z} A_1^* e^{-ik_1 z}, \quad (10.13)$$

$$P_3(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = 4\varepsilon_0 d A_1 e^{ik_1 z} A_2 e^{ik_2 z}. \quad (10.14)$$

kde  $d$  je efektivní nelineární koeficient pro danou geometrii.

Dosazením těchto polarizací do (10.11) dostaneme soustavu tří rovnic vázaných vln

$$\frac{dA_1}{dz} = i \frac{2\omega_1}{n_1 c} d A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \quad (10.15)$$

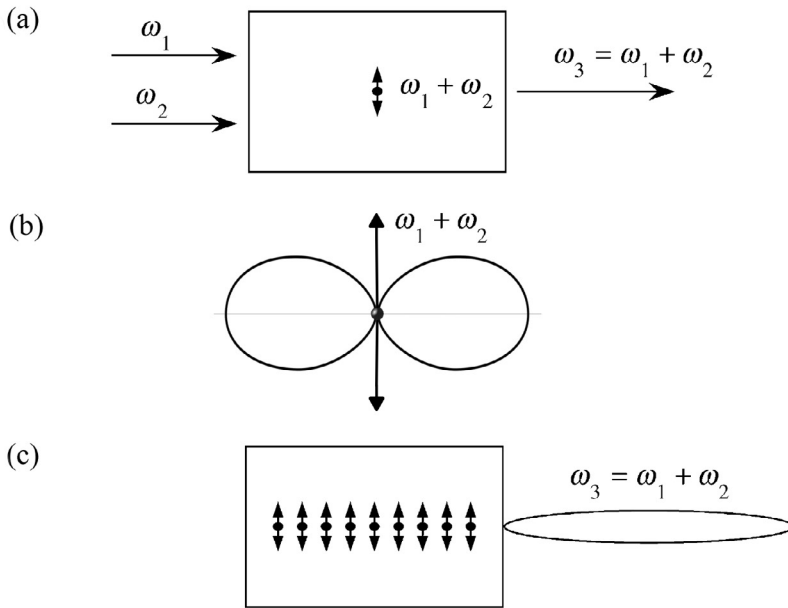
$$\frac{dA_2}{dz} = i \frac{2\omega_2}{n_2 c} d A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \quad (10.16)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = i \frac{2\omega_3}{n_3 c} d A_1 A_2 e^{i\Delta k z}, \quad (10.17)$$

kde jsme zavedli  $\Delta k \equiv k_1 + k_2 - k_3$ .

## 10.3 Podmínka sfázování

Pro jednoduchost nyní předpokládejme, že vstupní amplitudy polí  $A_1$ ,  $A_2$  jsou v rovnici (10.17) konstantní. Můžeme tak učinit, když účinnost generace součtové frekvence není velká. Pokud je splněna podmínka přesného sfázování  $\Delta k = 0$ , lze diferenciální rovnici (10.17) jednoduše zintegrovat.



Obrázek 10.1: Mikroskopický pohled na generaci součtové frekvence. (a) Díky nelineární odezvě na vstupní pole každý atom vytváří kmitající dipól, jehož záření obsahuje součtovou frekvenci. (b) Směrová charakteristika záření izolovaného atomu má tvar vyzařovacího diagramu dipólu. (c) Pokud je splněna podmínka sfázování, dochází ke konstruktivní interferenci kmitajících dipólů v dopředném směru a tím k vytvoření svazku se součtovou frekvencí

V případě přesného sfázování má generovaná vlna na součtové frekvenci s nelineární polarizací pevnou fází a konverze ze vstupních vln je maximální. Z mikroskopického hlediska dochází ke konstruktivní interferenci vyzařování kmitajících dipólů v dopředném směru – viz obr. 10.1.

Podívejme se nyní na obecnější případ  $\Delta k \neq 0$ . Integrací (10.17) dostaneme na výstupu krystalu délky  $L$  pole

$$A_3(L) = i \frac{2\omega_3}{n_3 c} d A_1 A_2 \int_0^L e^{i\Delta k z} dz = i \frac{2\omega_3}{n_3 c} d A_1 A_2 \left( \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} \right). \quad (10.18)$$

Výsledek převedeme na intenzity dle vztahu  $I_i = 2n_i \varepsilon_0 c |A_i|^2$

$$I_3(L) = \frac{2\omega_3^2}{n_1 n_2 n_3 \varepsilon_0 c^3} d^2 I_1 I_2 \left| \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} \right|^2, \quad (10.19)$$

zjednodušíme člen v hranaté závorce

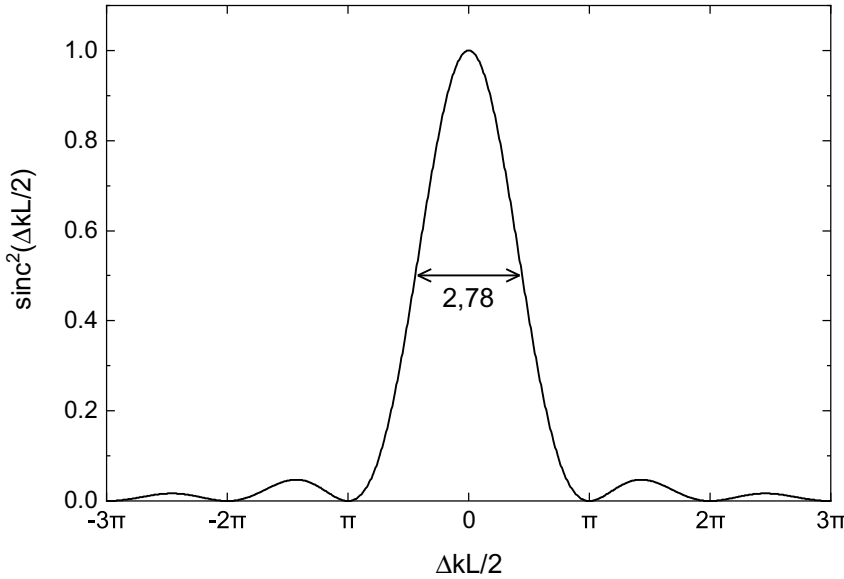
$$I_3(L) = \frac{2\omega_3^2}{n_1 n_2 n_3 \varepsilon_0 c^3} d^2 I_1 I_2 \left( \frac{2 - 2 \cos \Delta k L}{\Delta k^2} \right) \quad (10.20)$$

a vztah upravíme užitím funkce sinc, která je definovaná jako  $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$

$$I_3(L) = \frac{2\omega_3^2}{n_1 n_2 n_3 \varepsilon_0 c^3} d^2 I_1 I_2 \left( L^2 \text{sinc}^2 \frac{\Delta k L}{2} \right). \quad (10.21)$$

Závěrem stačí převést frekvenci  $\omega$  na vlnovou délku ve vakuu  $\lambda = 2\pi c/\omega$  a obdržíme pro intenzitu součtové frekvence na výstupu z krystalu

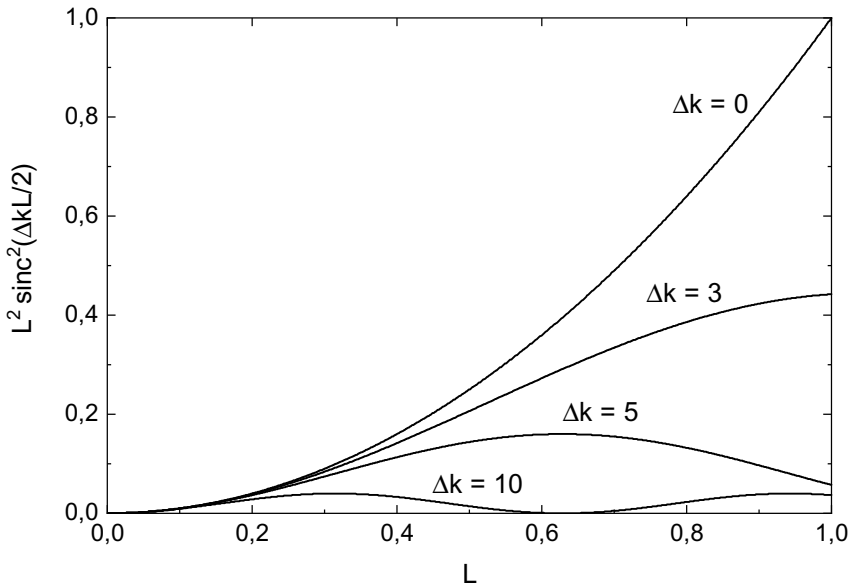
$$I_3(L) = \frac{8\pi^2}{n_1 n_2 n_3 \varepsilon_0 c \lambda_3^2} d^2 I_1 I_2 L^2 \text{sinc}^2 \frac{\Delta k L}{2}. \quad (10.22)$$



Obrázek 10.2: Průběh funkce  $\text{sinc}^2(\Delta k L/2)$

Průběh funkce  $\text{sinc}^2(\Delta k L/2)$  vidíme na obr. 10.2. Účinnost generace

součtové frekvence (obecně třívlňových procesů) je maximální za podmínky přesného sfázování. Všimněme si, že v argumentu funkce je součin  $\Delta k L$ . Znamená to, že čím budeme mít delší krystal (dráhu interakce), tím musíme více dbát na přesné sfázování. Vynásobíme-li tuto funkci  $L^2$ , dostaneme dle vztahu (10.22) průběh šíření intenzity součtové frekvence  $I_3(z)$  – viz obr. 10.3. Mimo případ přesného sfázování vidíme oscilace intenzity součtové frekvence při šíření krystalem. Lokální pokles intenzity součtové frekvence je způsoben tím, že fáze mezi součtovou frekvencí a nelineární polarizací se stane takovou, kdy začne docházet ke zpětnému toku energie ze součtové frekvence do polarizace látky. Někdy se proto definuje tzv. koherenční délka vztahem  $l_c = \pi/\Delta k$ , která udává polohu tohoto zlomu.



Obrázek 10.3: Průběh intenzity součtové frekvence při šíření krystalem pro různá rozladění (v relativních jednotkách)

Jak v praxi dosáhnout sfázování se budeme zabírat v kapitole 11.2.

## 10.4 Manleyovy-Roweovy relace

Předpokládejme interakci tří vln v nelineárním bezeztrátovém médiu. Prostorovou změnu intenzity  $I_i = 2n_i \varepsilon_0 c A_i A_i^*$  můžeme vyjádřit její derivací

$$\frac{dI_i}{dz} = 2n_i \varepsilon_0 c \left( A_i^* \frac{dA_i}{dz} + A_i \frac{dA_i^*}{dz} \right). \quad (10.23)$$

Za derivace amplitud dosadíme z (10.15) a po úpravě obdržíme

$$\frac{dI_1}{dz} = 4\omega_1 \varepsilon_0 d \left( iA_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} + c.c. \right). \quad (10.24)$$

Užitím identity  $(iA + c.c.) = -2 \operatorname{Im} A$  získáme

$$\frac{dI_1}{dz} = -8\omega_1 \varepsilon_0 d \operatorname{Im} \left( A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \right). \quad (10.25)$$

Analogicky pro změny intenzity ostatních svazků dostaneme

$$\frac{dI_2}{dz} = -8\omega_2 \varepsilon_0 d \operatorname{Im} \left( A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \right), \quad (10.26)$$

$$\frac{dI_3}{dz} = +8\omega_3 \varepsilon_0 d \operatorname{Im} \left( A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \right). \quad (10.27)$$

Změna celkové intenzity svazků v krystalu  $I = I_1 + I_2 + I_3$  je dána

$$\frac{dI}{dz} = \frac{dI_1}{dz} + \frac{dI_2}{dz} + \frac{dI_3}{dz}. \quad (10.28)$$

Dosazením za jednotlivé derivace a uvážením  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  dostaneme zachování celkové intenzity

$$\frac{dI}{dz} = -8(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \varepsilon_0 d \operatorname{Im} \left( A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \right) = 0. \quad (10.29)$$

Soustava (10.25–10.27) po vydělení příslušnými frekvencemi  $\omega_i$  nám dá rovnost

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{I_3}{\omega_3} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{I_1}{\omega_1} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{I_2}{\omega_2} \right). \quad (10.30)$$

Tyto rovnosti je známý jako Manleyovy-Roweovy relace. Protože energie fotonu je rovna  $\hbar\omega$ , veličiny  $I_i/\omega_i$ , které se vyskytují v (10.30), vyjadřují fotonové toky. Relace tudíž říkají, že rychlost kreace fotonů na frekvenci  $\omega_3$  je stejná jako rychlost anihilace fotonů na frekvencích  $\omega_1$  a  $\omega_2$ . Jinak řečeno, foton na součtové frekvenci vzniká za současného zániku fotonu v obou dalších svazcích a naopak.

## 10.5 Parametrické a neparametrické procesy

Procesy, o kterých jsme dosud mluvili, se označují jako *parametrické*. Patří sem generace součtové a rozdílové frekvence, optické parametrické generátory, jevy spojené s nelineárním indexem lomu, čtyřvlonné směšování, atp. Jedná se o nelineární procesy, u kterých je počáteční a konečný kvantově-mechanický stav látky identický. Obsazení základního stavu se mění pouze na velice krátký okamžik, kdy se částice nacházejí na virtuální hladině. Podle principu neurčitosti je virtuální hladina obsazena po časový interval řádu  $\hbar/\Delta E$ , kde  $\Delta E$  je rozdíl energií mezi virtuální hladinou a nejbližší reálnou hladinou. Parametrické procesy jsou významné také proto, že umožňují generovat neklasické stavy světla (jako jsou např. provázané páry fotonů), které mají široké uplatnění v kvantové optice a kvantových technologiích.

Naproti tomu, procesy které zahrnují přesuny populací mezi reálnými hladinami se nazývají *neparametrické*. Jako příklad můžeme uvést stimulo- vané rozptyly, nelineární absorpci, dvoufotonovou absorpci, multifotonovou ionizaci, atp.

Parametrické procesy je možné popsat reálnou nelineární susceptibilitou, kdežto pro popis neparametrických procesů je třeba užít komplexní nelineární susceptibilitu.

Dalším rozdílem je, že při parametrickém procesu se zachovává celková energie a moment hybnosti fotonů, protože nedochází k přenosu energie a hybnosti mezi fotony a nelineárním médiem. Ve světle toho můžeme na podmínku sfázování  $\sum_i \vec{k}_i = 0$  nahlížet jako na podmínku zachování celkové hybnosti mezi fotony, neboť hybnost fotonu je dána  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  a tudíž  $\sum_i \vec{p}_i = 0$ . Rovněž tak případ interakce, kdy  $\Delta k \neq 0$  (viz kapitola 10.3), je možné interpretovat na základě relací neurčitosti  $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ , vezmeme-li v úvahu konečnou délku krystalu (interakční délku)  $L$ .