

### 3.4 SYMETRIE A VLASTNOSTI LÁTEK

Například Ohmův zákon zapsaný v tenzorovém tvaru vypadá takto

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E},$$

nebo-li

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

kde  $\vec{j}$  a  $\vec{E}$  jsou vektory proudové hustoty a elektrického pole,  $\hat{\sigma}$  označuje *tenzor* elektrické vodivosti. Pro vektor elektrického pole  $\vec{E} = (E_1, 0, 0)$  dostaneme po dosazení do 3.3 vektor proudové hustoty

$$\vec{j} = (\sigma_{11}E_1, \sigma_{12}E_1, \sigma_{13}E_1),$$

tj. vektor elektrického pole je obecně *nekolinéární* s vektorem  $\vec{j}$ .

V reálném experimentu můžeme měřit hodnotu fyzikální veličiny ve zvoleném směru. V případě vektorových veličin je naměřená hodnota dána *průmětem* vektoru veličiny do daného směru, tj. skalárním součinem s jednotkovým vektorem v měřeném směru.

V případě tenzorů je postup obdobný. Mějme vektorové veličiny  $\vec{p}$  a  $\vec{q}$ , pro které platí vztah  $\vec{p} = \hat{T}\vec{q}$ , kde  $\hat{T}$  je tenzor. Obecně lze vyjádřit  $i$ -tou složku vektorové veličiny  $\vec{p}$  vztahem (viz vztah 3.3)

$$p_i = \sum_k T_{ik} q_k. \quad (3.4)$$

Hodnotu  $\vec{p}$  ve směru  $\vec{q}$  určíme ze skalárního součinu  $\vec{p}$  s jednotkovým vektorem ve směru  $\vec{q}$ ,  $\vec{e}_{\vec{q}}$ ,

$$p_{\parallel} = \vec{p} \cdot \vec{e}_{\vec{q}}. \quad (3.5)$$

Hodnota veličiny popsané tenzorem  $\hat{T}$  ve směru  $\vec{q}$  je vyjádřena vztahem

$$\hat{T}_{\vec{q}} = \frac{p_{\parallel}}{q}, \quad (3.6)$$

kde  $q$  je velikost  $\vec{q}$ . Složky vektoru  $p_{\parallel}$  3.5 můžeme zapsat pomocí složek  $p_i$  (rovnice 3.4),

$$p_{\parallel} = \sum_i \sum_k T_{ik} q_k e_{i,\vec{q}}. \quad (3.7)$$

Výsledek 3.7 dosadíme do 3.6 a po úpravě dostaneme

$$\hat{T}_{\vec{q}} = \frac{\sum_i \sum_k T_{ik} q_k e_{i,\vec{q}}}{q} = \sum_i \sum_k c_i T_{ik} c_k, \quad (3.8)$$

kde  $c_i = e_{i,\vec{q}}$  a  $c_k = q_k/q$  jsou směrové kosiny. Pokud známe směrové kosiny  $c_i$  a tenzor  $\hat{T}$  je symetrický, má  $\hat{T}_{\vec{q}}$  tvar

$$\hat{T}_{\vec{q}} = T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 + 2T_{12}c_1c_2 + 2T_{13}c_1c_3 + 2T_{23}c_2c_3. \quad (3.9)$$

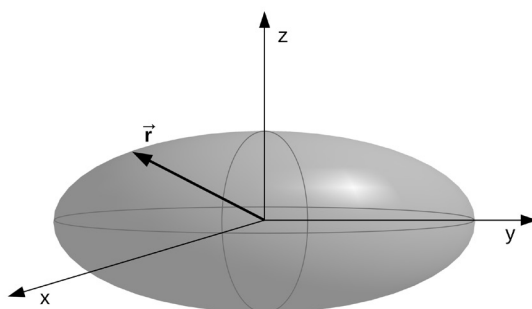
Rovnice 3.8 připomíná rovnici kvadriky tenzoru

$$\sum_i \sum_k x_i T_{ik} q_k x_k = 1, \quad (3.10)$$

což je plocha druhého řádu. Zavedeme-li sférické souřadnice, tak pro směrové kosiny platí  $x_i = r \cdot c_i$ . Po dosazení do 3.10 máme

$$r^2 \sum_i \sum_k c_i T_{ik} q_k c_k = 1 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\hat{T}_{\vec{r}}}}. \quad (3.11)$$

Jsou-li  $T_{ii} > 0$  je kvadrika tenzoru rotačním elipsoidem. Vzdálenost bodu na tomto elipsoidu od počátku souřadnic je *nepřímo úměrná* odmocnině hodnoty veličiny popsané tenzorem  $\hat{T}$  ve směru  $r$  (rovnice 3.11), jak je schématicky ukázáno na obrázku 3.13. Symetrie kvadriky určuje symetrii fyzikální veličiny vyjádřené tenzorem  $\hat{T}$ .



**Obrázek 3.13:** Kvadrika tenzoru. Délka vektoru  $\vec{r}$  je nepřímo úměrná druhé odmocnině hodnoty fyzikální veličiny popsané tenzorem  $\hat{T}$  ve směru  $\vec{r}$ .

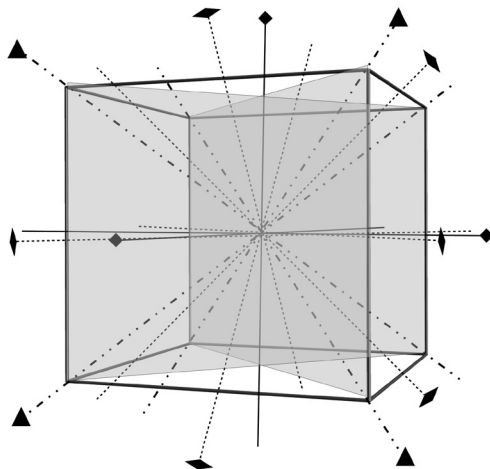
K symetrii vnějšího tvaru krystalů (32 prostorovým bodovým grupám, viz str.166) a jejich vlastnostem se váží následující tři principy:

## 3.4 SYMETRIE A VLASTNOSTI LÁTEK

### 3.4.1 Neumannův princip

Fyzikální vlastnost má symetrii stejnou nebo vyšší, než je bodová symetrie krystalu.

Přesněji bychom mohli tento princip vyjádřit takto: *Grupa operací symetrie fyzikální vlastnosti krystalu popsané tenzorem  $\hat{T}$  musí obsahovat všechny operace symetrie bodové grupy tohoto krystalu.* Na obrázku 3.14 jsou zakresleny některé z prvků symetrie krychle (kubický krystal). Podle Neumannova principu musí být všechny operace symetrie náležící symetrii krychle obsaženy v grupě symetrie dané fyzikální vlastnosti. Symetrie fyzikální vlastnosti  $\hat{T}$  je dána symetrií metriky, viz obr. 3.13. Grupa operací popisující symetrii vlastnosti  $\hat{T}$  (tj. i elipsoid metriky) tudíž musí obsahovat několik dvojčetných rotačních os  $C_2$ , trojčetné osy  $C_3$  podél tělesových úhlopříček krychle, čtyřčetné osy  $C_4$  a roviny zrcadlení, z nichž dvě jsou na obrázku 3.14 zakresleny. Metrika tenzoru vyhovující všem operacím symetrie krychle zdegeneruje na kouli, která má vyšší symetrii než krychle. Proto nemůžeme pozorovat dvojlom (tj. anizotropii indexu lomu) u kubických látek.



**Obrázek 3.14:** Některé prvky symetrie krychle. Jsou zakresleny dvojčetné osy  $C_2$  prostupující středy protilehlých hran, čtyřčetné osy  $C_4$  a trojčetné  $C_3$ , které prochází protilehlými vrcholy krychle podél směru tělesových úhlopříček.

### 3.4.2 Voigtův princip

Tenzor žádné fyzikální veličiny se nesmí změnit při jakékoliv operaci bodové grupy symetrie krystalu.

Tento princip navazuje na předchozí a mohli bychom jej matematicky formulovat jako podmínku *invariantnosti* tenzoru  $\hat{T}$  vůči operacím symetrie bodové grupy krystalu. Ukažme si důsledky tohoto principu na příkladu ortorombického krystalu majícího bodovou grupu 222, tj. podél souřadnicových os leží navzájem kolmé dvojčetné osy (viz obrázek 3.7 na straně 166). Hodnota fyzikální vlastnosti  $\hat{T}$  ve směru  $\vec{q}$  je dána vztahem 3.9. Operace rotací  $C_2$  podél souřadnicových os jsou určeny maticemi

$$C_{2,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$C_{2,y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$C_{2,z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Tyto operace symetrie změny hodnoty směrových kosinů ve vztahu 3.9 následovně:

$$C_{2,x} \quad c_1 \rightarrow c_1 \quad c_2 \rightarrow -c_2 \quad c_3 \rightarrow -c_3 \quad (3.15)$$

$$C_{2,y} \quad c_1 \rightarrow -c_1 \quad c_2 \rightarrow c_2 \quad c_3 \rightarrow -c_3 \quad (3.16)$$

$$C_{2,z} \quad c_1 \rightarrow -c_1 \quad c_2 \rightarrow -c_2 \quad c_3 \rightarrow c_3. \quad (3.17)$$

Dosazením 3.17 do 3.9 dostaneme celkem čtyři rovnice, které musí platit současně:

$$\begin{aligned} \text{bez rotací} \quad \hat{T}_{\vec{q}} &= T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 + 2T_{12}c_1c_2 + 2T_{13}c_1c_3 + 2T_{23}c_2c_3 \\ C_{2,x} \quad \hat{T}_{\vec{q}} &= T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 - 2T_{12}c_1c_2 - 2T_{13}c_1c_3 + 2T_{23}c_2c_3 \\ C_{2,y} \quad \hat{T}_{\vec{q}} &= T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 - 2T_{12}c_1c_2 + 2T_{13}c_1c_3 - 2T_{23}c_2c_3 \\ C_{2,z} \quad \hat{T}_{\vec{q}} &= T_{11}c_1^2 + T_{22}c_2^2 + T_{33}c_3^2 + 2T_{12}c_1c_2 - 2T_{13}c_1c_3 - 2T_{23}c_2c_3. \end{aligned}$$

### 3.4 SYMETRIE A VLASTNOSTI LÁTEK

**Tabulka 3.4:** Tvar obecného symetrického tenzoru  $\hat{T}$  pro krystalové soustavy. Číslo v závorce určuje počet nezávislých prvků matice tenzoru  $\hat{T}$ .

|   |  |
|---|--|
| triklinická (6)                           | $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$ |
| monoklinická (4)                          | $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$                     |
| ortorombická (3)                          | $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$                               |
| hexagonální, trigonální, tetragonální (2) | $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$                               |
| kubická (1)                               | $\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{11} \end{pmatrix}$                               |

Snadno nahlédneme, že uvedené rovnice platí jen v případě, že

$$T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0, \quad (3.18)$$

a tudíž tenzor vlastnosti  $\hat{T}$  má pro bodovou grupu krystalu 222 tvar

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Tenzor vlastnosti  $\hat{T}$  má v případě ortorombické látky v důsledku symetrie jen tři nezávislé členy –  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  a  $T_{33}$ .

V tabulce 3.4 jsou uvedeny matice obecného symetrického tenzoru pro všech sedm krystalových soustav.

#### 3.4.3 Curieův princip

Krystal změní svoji bodovou symetrii pod vlivem vnějšího působení tak, že zachová pouze ty prvky symetrie, které jsou společné s prvky symetrie působení.