Kapitola 14

Posloupnosti a řady funkcí

Shrnutí kapitoly: *Tato kapitola obsahuje látku související s posloupnostmi a řadami funkcí. Půjde o zobecnění výsledků z Kapitol 3 a 5, kde byly studovány limity reálných a komplexních funkcí a posloupností, a zejména pak z Kapitoly 10, kde byly studovány speciální řady funkcí, totiž řady mocninné. Seznámíme se s novými pojmy jako je bodová a (lokálně) stejnoměrná konvergence, poté se naučíme pomocí různých kritérií stejnoměrnou konvergenci ověřovat (u řad funkcí půjde o zobecnění kritérií pro konvergenci číselných řad z Kapitoly 9). Ukážeme si také aplikace stejnoměrné konvergence na záměnu limit, limity a sumy, derivace a limity (sumy) a Riemannova integrálu a limity (sumy). Mimo jiné znovu dokážeme výsledek formulovaný v trochu jiných pojmech v Kapitole 11, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost funkcí. Toho pak využijeme při konstrukci funkce, která je spojitá na celé reálné ose, není ale diferencovatelná v žádném bodě.*

14.1 Bodová a stejnoměrná konvergence

V předchozích kapitolách jsme už několikrát narazili na problém prohození pořadí dvojice limitních procesů. Obecně není možné tuto operaci provádět: například $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{n}\right) \neq \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}\right)$. Na druhou stranu, v některých situacích to možné je a někdy se dokonce jedná o velmi účinný nástroj k řešení matematických problémů (vzpomeňte si na prohazování sumy a derivace v případě mocninných řad, což se často využívá při jejich sčítání). Zde se budeme zabývat posloupnostmi funkcí, které v jistém smyslu konvergují k nějaké funkci, a bude nás zajímat, jak vlastnosti členů posloupnosti funkcí ovlivňují vlastnosti funkce limitní. Základní otázkou bude právě prohození limitních procesů. Jako velice vhodný typ konvergence se ukáže nám již dobře známá konvergence generovaná maximovou normou na prostorech spojitých funkcí, tedy na prostoru $C([a,b])$ s normou

$$\|u\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|.$$

Odpovídající konvergenci jsme nazývali *stejnoměrná konvergence.* Tento pojem je vhodné rozšířit i do situací, kdy pracujeme na obecnější množině, než je omezený uzavřený interval.

Definice 14.1.1 (Stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje stejnoměrně* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } x \in \Omega.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω.

Stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí stejnoměrné konvergence jejích částečných součtů. Pro řadu funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ říkáme, že tato řada konverguje stejnoměrně k funkci S, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|s_n(x) - S(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0 \text{ a } x \in \Omega.$$

Potom píšeme $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \rightrightarrows S$ na Ω, popřípadě $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \rightrightarrows$ (neboť součet řady často neznáme).

Poznámka 14.1.2. (i) Jestliže $m \in \mathbb{N}$, $\Omega_i \subset \mathbb{R}^N$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$ a $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_i pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$ (k zadanému $\varepsilon > 0$ má každá množina Ω_i index, od něhož platí odhad z definice, na $\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$ pak stačí vzít maximum z těchto indexů). Speciálně, pokud $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na (a, b), $\varphi_n(a) \to \varphi(a)$ a $\varphi_n(b) \to \varphi(b)$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[a, b]$.
(ii) Pro nekonečný počet množin podobné tvrzení neplatí. Stačí uvážit posloupnost $\varphi_n(x) = \frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$ a množiny $\Omega_i = [-i, i]$, $i \in \mathbb{N}$.
(iii) Pokud $\Omega_1 \subset \Omega_2$, pak $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_2 implikuje $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω_1.

Budeme pracovat ještě s jedním typem konvergence posloupnosti funkcí. Tato konvergence nesouvisí s žádnou normou či metrikou, ale již jsme se s ní setkali při studiu konvergence mocninných řad.

Definice 14.1.3 (Bodová konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.

Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$ *konverguje bodově* na Ω k funkci φ, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \Omega$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

V takovém případě píšeme $\varphi_n \to \varphi$ na Ω.

Bodovou konvergenci řady funkcí definujeme pomocí bodové konvergence jejích částečných součtů. Tedy pro řadu funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ říkáme, že tato řada konverguje bodově k funkci S, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \Omega$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|s_n(x) - S(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Potom píšeme $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \to S$ na Ω, popřípadě $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \to$ (neboť součet řady často neznáme).

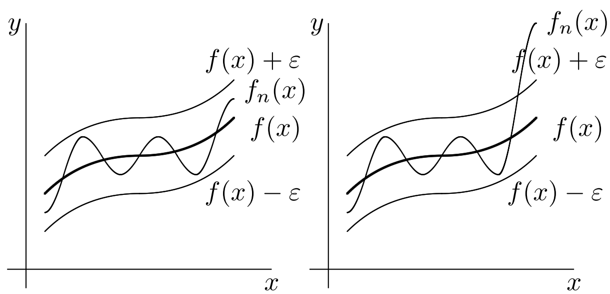
Poznámka 14.1.4. (i) Zatímco u stejnoměrné konvergence číslo δ závisí jen na ε, u bodové konvergence připouštíme ještě závislost na $x \in \Omega$. Toto je vyjádřeno v zápise pomocí predikátové logiky prohozením pořadí obecného a existenčního kvantifikátoru. Tedy $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na Ω, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty)\ \forall x \in \Omega \qquad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

zatímco $\varphi_n \to \varphi$ na Ω, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \Omega\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty) \qquad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

(ii) Snadno vidíme, že stejnoměrná konvergence implikuje bodovou.
(iii) Bodová konvergence stejnoměrnou neimplikuje. Stačí uvážit funkce $\varphi_n(x) = \frac{x}{n}$ na $\mathbb{R}$.
(iv) Má-li Ω jen konečný počet prvků, pak obě konvergence splývají.
(v) Snadno se nahlédne, že pokud $\varphi_n \to \varphi$ na Ω_α, kde α probíhá libovolnou (třeba i nespočetnou) množinu A, pak $\varphi_n \to \varphi$ na $\bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$.



Obrázek 14.1: Porovnání bodové a stejnoměrné konvergence: zatímco stejnoměrná konvergence požaduje, aby grafy funkcí f_n ležely v tenkých pásech okolo grafu funkce f, bodová konvergence připouští, že se funkce f_n budou v některých bodech k funkci f přibližovat hodně nerovnoměrně.

Následující výsledek plyne triviálně z definic. Je to však základní nástroj ověřování stejnoměrné konvergence.

Tvrzení 14.1.5 (O charakterizaci stejnoměrné konvergence). *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω. Pak*

$$\varphi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\sup_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|) = 0.$$

Důkaz. Levou stranu tvrzení lze zapsat jako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty) \ \forall x \in \Omega \qquad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

zatímco pravou stranu jako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \cup [n_0, \infty) \qquad \sup_{x \in \Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

„$\Rightarrow$“ Je-li tedy $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \Omega$, je též $\sup_{x \in \Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$, což dává důkaz implikace (ostrá a nesotrá nerovnost v definici limity nehraje roli).
„$\Leftarrow$“ Je-li $\sup_{x \in \Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, je nutně $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \Omega$, což ukončuje důkaz tvrzení. □

Poznámka 14.1.6. Připomeňme, že pro případ $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, či obecněji, pro $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ kompaktní a pro případ funkcí φ_n a φ spojitých na Ω je

$$\sup_{x \in \Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \max_{x \in \Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\|_{C(\Omega)}.$$

Pro tento případ je stejnoměrná konvergence vlastně konvergence v normě prostoru $C(\Omega)$.

Cvičení 14.1.7. Rozmyslete si podrobně, co se změní v předchozí poznámce, pokud pro případ $\Omega = (a, b)$ omezený otevřený interval nejsou příslušné funkce spojité na $\overline{\Omega} = [a, b]$.

Příklad 14.1.8. Uvažujme posloupnost funkcí $\varphi_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$. Snadno nahlédneme, že $\varphi_n \to \varphi$, kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Vzhledem ke vztahu bodové a stejnoměrné konvergence je φ jediným kandidátem na limitu při stejnoměrné konvergenci. Nyní již snadno nahlédneme, že $\{\varphi_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0, 1]$, neboť

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty = \sup_{[0,1]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 1 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Mohli jsme také použít úplnost prostoru $C([0, 1])$ opatřeného supremovou normou, díky které musí být stejnoměrné limity spojitých funkcí opět spojité, což bylo ukázáno ve druhém díle skript, v Příkladu 11.5.4 (vi). K tomu se ještě vrátíme později.

Příklad 14.1.9. (i) Jestliže vezmeme $\varphi_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$ a φ jako bodovou limitu představenou v předchozím příkladu, máme

$$\sup_{[0,1]} |\varphi_n - \varphi| = \sup_{[0,1)} x^n = 1,$$

čímž jsme opět vyvrátili stejnoměrnou konvergenci na $[0,1]$.

Pokud bychom však pracovali na intervalu $[0,1-\delta]$ pro libovolné $\delta \in (0,1)$, měli bychom

$$\sup_{[0,1-\delta]} |\varphi_n - \varphi| = \sup_{[0,1-\delta]} x^n = (1-\delta)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

a proto $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $[0,1-\delta]$.

(ii) Uvažujme posloupnost $\varphi_n(x) = x \arctan(nx)$ na $\mathbb{R}$. Okamžitě dostáváme $\varphi_n(x) \to \frac{\pi}{2}|x| =: \varphi(x)$ na $\mathbb{R}$. Díky sudosti příslušných funkcí se stačí v dalším omezit na interval $[0,\infty)$. Hledáme suprema funkcí

$$D_n(x) := \frac{\pi}{2}x - x\arctan(nx).$$

Máme

$$D_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Protože ze vzorce pro D_n' není vidět, ve kterých bodech funkce D_n nabývá globálního maxima (dokonce ani není jasné, že se maxima vůbec nabývá), přistupme k podrobnějšímu studiu průběhu funkce D_n. Máme

$$D_n''(x) = -\frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{-2n}{(1+n^2x^2)^2} < 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} D_n'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) - \frac{nx}{1+n^2x^2}\right) = 0, \quad D_n'(0) = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Odtud je D_n' kladná na $[0,\infty)$, proto je D_n rostoucí na $[0,\infty)$ a dostáváme

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi| &= \sup_{[0,\infty)} D_n = \lim_{x\to\infty} D_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}x - x\arctan(nx)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(nx)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{n}{1+n^2x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{nx^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zřejmě tedy $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n - \varphi| = 0$, a proto $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $\mathbb{R}$.

Připomeňme si výsledek z teorie metrických prostorů, podle něhož stejnoměrná limita funkcí z $C([a,b])$ je opět spojitá funkce. Pokud bychom chtěli podobný výsledek třeba pro otevřený interval (a,b), stačí nám pro každý bod $x_0 \in (a,b)$ najít interval $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, kde použijeme stejnoměrnou konvergenci. Pro tento typ problémů se tedy hodí následující zeslabení pojmu stejnoměrná konvergence.

Definice 14.1.10 (Lokálně stejnoměrná konvergence)**.** Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost funkcí z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ definovaných na $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na Ω.