15.5 Jednoduché funkce, aproximace měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi a spojitými funkcemi

Výše jsme si uvedli, že jsme již připraveni definovat integrál pro po částech konstantní měřitelné funkce. Ve skutečnosti dokážeme pracovat s širší třídou funkcí, která se nám pro budování teorie ukáže jako klíčová.

Definice 15.5.1 (Jednoduchá funkce)**.** Nechť X je množina a $s\colon X \mapsto \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s je *jednoduchá* funkce, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Poznámka 15.5.2. Jednoduchou funkci je tedy možné zapsat jako

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j},$$

kde $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^*$ a A_j, $j = 1, \ldots, n$ jsou podmnožiny X. Předchozí reprezentace je jednoznačná, pokud jsou $\{\alpha_j\}$ různé hodnoty a $\{A_j\}$ po dvou disjunktní. V takovém případě je jednoduchá funkce měřitelná právě tehdy, když všechny množiny A_j jsou měřitelné.

Příklad 15.5.3. (i) Každá po částech konstantní funkce s popsaná pomocí konečného počtu intervalů je jednoduchá.
(ii) Dirichletova funkce je jednoduchá a lebesgueovsky měřitelná.
(iii) Numerická funkce definovaná jako $f \equiv \infty$ na $\mathbb{R}$ je jednoduchá a lebesgueovsky měřitelná.

Měřitelnost funkce s jednoduchými funkcemi úzce souvisí. Připomeňme, že už víme, že bodová limita jednoduchých měřitelných funkcí je měřitelná. Platí i obrácený výsledek.

Věta 15.5.4 (O aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $f\colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na X taková, že $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$, $s_n < \infty$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s_n \to f$ na X.*

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \ldots, n2^n\}$ definujme množinu

$$F_{n,k} = \Big\{x \in X \colon \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\Big\}.$$

Nyní položíme

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{pro } x \in F_{n,k}, \text{ kde } k \in \{1, \ldots, n2^n\} \\ n & \text{pro } x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n2^n} F_{n,k}. \end{cases}$$

Tím jsme dostali jednoduchou funkci s oborem hodnot $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, n - \frac{1}{2^n}, n\}$ splňující $|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ kdykoliv $f(x) \leq n$. Odtud $s_n \to f$ na X. Navíc jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, \dots, n2^n\}$ platí $\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$, pak máme $\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$ a mohou nastat jen dvě možnosti

$$\frac{2(k-1)}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad s_{n+1}(x) = \frac{2(k-1)}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = s_n(x)$$

a

$$\frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} \le f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad s_{n+1}(x) = \frac{2(k-1)+1}{2^{n+1}} = s_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Proto $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$. □

Poznámka 15.5.5. (i) Pokud je f navíc omezená, máme $s_n \rightrightarrows f$ na X.
(ii) Pokud f mění znaménko, lze předchozí konstrukci aplikovat na f^+ a f^-. Dostaneme bodově konvergentní posloupnost jednoduchých funkcí, nicméně obecně už konvergence není monotonní.

Lebesgueovsky měřitelné funkce se dají navíc aproximovat spojitými funkcemi. Musíme ovšem část definičního oboru odebrat.

Věta 15.5.6 (O aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existují měřitelná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na $\mathbb{R}^N$ takové, že $\lambda_N(A) < \varepsilon$ a $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$.*

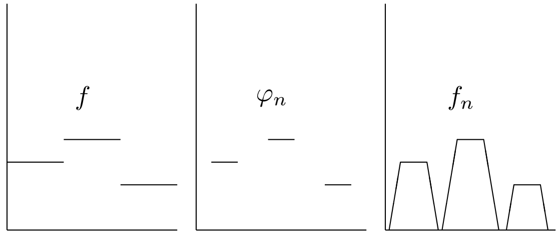
Důkaz. Nejprve si stručně uvedeme myšlenku důkazu. Prvním krokem je aproximace pomocí jednoduchých funkcí tvaru $s_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{A_{n,k}}$. Pokračujeme přechodem k jednoduchým funkcím tvaru $\varphi_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{F_{n,k}}$, kde $F_{n,k} \subset A_{n,k}$ jsou uzavřené množiny, pro něž je $\lambda_N(A_{n,k} \setminus F_{n,k})$ velice malá (sjednocením těchto množin nakonec vznikne právě maličká množina A ze znění věty). Výhoda přechodu k množinám $F_{n,k}$ spočívá v tom, že mezi těmito množinami vznikl prostor, který nám umožní konstantní části funkce spojitě dodefinovat. Některé ze zmíněných kroků vyžadují kompaktnost použitých množin, proto nejprve uvedeme podrobný důkaz pro případ aproximace na omezené množině. Modifikaci důkazu pro obecný případ provedeme na konci.

Krok 1: aproximace na omezené množině.
Zde se budeme zabývat aproximací na otevřené jednotkové kouli $B_1(0)$. Podle předchozí poznámky Věta o aproximaci měřitelných funkcí jednoduchými funkcemi (Věta 15.5.4) dává posloupnost jednoduchých funkcí $s_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_{n,k}\chi_{A_{n,k}}$, kde $\{a_{n,k}\}$ jsou reálná čísla a $\{A_{n,k}\}$ jsou lebesgueovsky měřitelné množiny. Podle Věty o vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry (Věta 15.3.19) existují kompaktní množiny $\{F_{n,k}\}$ tak, že $F_{n,k} \subset A_{n,k} \cap B_1(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_1(0)) \setminus F_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}}.$$

Podle Tvrzení o vzdálenosti uzavřené a kompaktní množiny (Tvrzení 15.3.20) pak existuje $\delta_n \in (0,1)$ takové, že

$$\operatorname{dist}(F_{n,k_1}, F_{n,k_2}) \ge 2\delta_n \quad \text{kdykoliv } k_1, k_2 \in \{1, \dots, m_n\} \text{ a } k_1 \ne k_2.$$



Obrázek 15.2: Nahrazení jednoduché funkce funkcí spojitou: nejprve lehce zmenšíme jednotlivé úrovňové množiny, pak funkci spojitě dodefinujeme na doplňku jejich sjednocení.

Definujme nyní funkci

$$f_n = \sum_{k=1}^{m_n} \psi_{n,k},$$

kde

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} a_{n,k}\left(1 - \frac{\operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k})}{\delta_n}\right) & \text{pokud } 0 \le \operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k}) \le \delta_n \\ 0 & \text{pokud } \operatorname{dist}(\{x\}, F_{n,k}) \ge \delta_n. \end{cases}$$

Pak $\{f_n\}$ jsou spojité funkce, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f_n = s_n \qquad \text{na } \bigcup_{k=1}^{m_n} F_{n,k}$$

a

$$\begin{aligned} \lambda_N\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in B_1(0)\colon f_n(x) \neq s_n(x)\}\Big) &\le \lambda_N\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_n} ((A_{n,k} \cap B_1(0)) \setminus F_{n,k})\Big) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Krok 2: aproximace na neomezené množině.
Protože $\mathbb{R}^N = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l(0)$, pokusme se provést aproximaci na B_l pro všechna $l \in \mathbb{N}$. Jak se to dělá na $B_1(0)$, jsme si předvedli v minulém kroku. V něm získané kompaktní množiny označme $F_{n,k}^1$ a spojité aproximující funkce označme f_n^1. Pokud pracujeme na $B_2(0)$, postupujeme obdobně. Jen tentokrát se pokusíme o větší přesnost při aproximaci úrovňových množin pomocí množin kompaktních. Jako výše lze nalézt kompaktní množiny $\{\widetilde{F}_{n,k}^2\}$ tak, že $\widetilde{F}_{n,k}^2 \subset A_{n,k} \cap B_2(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_2(0)) \setminus \widetilde{F}_{n,k}^2) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+2}}.$$

Abychom si nezkazili aproximaci získanou na $B_1(0)$, položme ještě $F^2_{n,k} := \widetilde{F}^2_{n,k} \cup F^1_{n,k}$. Pak totiž stále máme

$$F^2_{n_k} \subset A_{n,k} \cap B_2(0) \qquad \text{a} \qquad \lambda_N((A_{n,k} \cap B_2(0)) \setminus F^2_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+2}},$$

ale navíc jsme ještě dostali $F^1_{n,k} \subset F^2_{n,k}$. S těmito množinami nyní pracujeme jako výše při konstrukci funkcí $\{f^2_n\}$.

Pokračujeme indukcí. Dostaneme $F^1_{n,k} \subset F^2_{n,k} \subset F^3_{n,k} \subset \cdots \subset A_{n,k}$, dále $F^l_{n,k} \subset A_{n,k} \cap B_l(0)$ a

$$\lambda_N((A_{n,k} \cap B_l(0)) \setminus F^l_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+k+l}}.$$

Nyní se již snadno ověří, že diagonální posloupnost $\{f^n_n\}$ má požadované vlastnosti. □

Poznámka 15.5.7. Vhodnou modifikací důkazu předchozí věty lze dokonce ukázat, že množina A, na které posloupnost spojitých funkcí nekonverguje k dané funkci, má nulovou míru.

Připomeňme, že spojité funkce jsou lebesgueovsky měřitelné. Na druhou stranu, lebesgueovsky měřitelné funkce vykazují jistou slabší verzi spojitosti. Před uvedením odpovídajícího výsledku ještě potřebujeme provést přípravu, která je zajímavá sama o sobě.

Věta 15.5.8 (Jegorovova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a platí $\mu(X) < \infty$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí z X do $\mathbb{R}^*$, které jsou skoro všude konečné a konvergují skoro všude na X. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje měřitelná množina $E \subset X$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $\{f_n\}$ konvergují stejnoměrně na $X \setminus E$.*

Důkaz. Díky předpokladům věty můžeme najít $A \subset X$ takovou, že $\mu(A) = 0$, $\{f_n\}$ jsou konečné na $X \setminus A$ a konvergují všude na $X \setminus A$ k funkci f. Pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ definujme množiny

$$E_{n,k} := \bigcup_{j=n}^{\infty} \{x \in X \setminus A \colon |f_j(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

Pak $\{E_{n,k}\}$ jsou měřitelné množiny a platí pro ně $E_{n,k} \supset E_{n+1,k}$. Dále díky bodové konvergenci pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k} = \emptyset.$$

Z posledních dvou informací a $\mu(E_{1,k}) < \infty$ (využíváme $\mu(X) < \infty$) dostáváme

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_{n,k}) = 0.$$

Ke každému $k \in \mathbb{N}$ proto lze najít $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(E_{n(k),k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Položme

$$B := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n(k),k} \qquad \text{a} \qquad E = A \cup B.$$

Pak $\mu(E) < \varepsilon$ a pro každé $x \in X \setminus E$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \text{pro každé } j > n(k).$$

□

Věta 15.5.9 (Luzinova věta)**.** *Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^N$ taková, že $\lambda_N(G) < \varepsilon$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^N \setminus G$ vzhledem k $\mathbb{R}^N \setminus G$.*

Důkaz. Podle Věty o aproximaci lebesgueovsky měřitelných funkcí spojitými funkcemi (Věta 15.5.6) existují $A \subset \mathbb{R}^N$ a posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}$ takové, že $f_n \to f$ na $\mathbb{R}^N \setminus A$ a $\lambda_N(A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aplikujme nyní Jegorovovu větu (Věta 15.5.8) na koulích $B_l(0)$, abychom pro všechna $l \in \mathbb{N}$ dostali množinu $A_l \subset B_l(0)$ splňující

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } B_l(0) \setminus (A \cup A_l) \qquad \text{a} \qquad \lambda_N(A_l) < \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}.$$

Restrikce bodové limity funkcí f_n na doplněk množiny $A \cup \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$ je zde proto spojitá a navíc platí $\lambda_N(A \cup \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l) < \varepsilon$. □

Poznámka 15.5.10. Jestliže uvažujeme funkci f definovanou na omezené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, po dodefinování funkce nulou vně Ω dostáváme z předchozí věty, že $\overline{\Omega} \setminus G$ je kompaktní, a proto je f zúženo na $\overline{\Omega} \setminus G$ stejnoměrně spojitá (vzhledem k $\overline{\Omega} \setminus G$).

15.6 Dodatek: o vztahu spojitých a měřitelných funkcí, další vlastnosti borelovských funkcí

V následujícím textu uvedeme několik příkladů a výsledků z teorie reálných funkcí (důkazy jsou součástí specializovaných přednášek na oboru matematika), o kterých si myslíme, že umožní čtenáři lepší pochopení právě probrané latky.

Předně Luzinova věta (Věta 15.5.9) se dá zesílit tak, že dokonce existuje funkce $g \in C(\mathbb{R}^N)$ splňující $g = f$ na $\mathbb{R}^N \setminus G$. To plyne z následujícího výsledku o rozšiřování spojitých funkcí, jehož důkaz lze, podobně jako důkazy všech ostatních vět z této sekce, nalézt v [Sr].

Věta 15.6.1 (Tietzeho věta)**.** *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $F \subset X$ je uzavřená množina a $f \in C(F)$. Pak existuje $g \in C(X)$ taková, že $g = f$ na F.*