Kapitola 17

Klasická teorie křivkového a plošného integrálu

Shrnutí kapitoly: *V této kapitole budeme budovat teorii integrace přes objekty ležící v* $\mathbb{R}^N$*, které ale přirozeně mají nižší dimenzi* k *(*$k = 1$ *pro křivky,* $1 < k < N$ *pro plochy). Integrace bude založena na Lebesgueově míře a integrálu. Pomocí parametrizace daný objekt převedeme do příslušné dimenze, v níž použitím Lebesgueova integrálu spočteme integrál. Budeme muset ale dokázat, že tento postup nezávisí na volbě parametrizace. Nejprve se budeme věnovat teorii křivkového integrálu prvního a druhého druhu; speciálně se soustředíme na vztah křivkového integrálu druhého druhu a potenciálnosti vektorového pole, které přes křivku integrujeme. Dále se budeme zabývat vlastnostmi plošného integrálu prvního druhu, přičemž zmíníme speciální vlastnosti v případě 2-ploch ve třech dimenzích. Nakonec budeme studovat věty, které propojují teorii křivkového a plošného integrálu a integrace v* N *dimenzích pomocí Lebesgueova integrálu a jsou analogií jednodimenzionální Takzvané hlavní věty diferenciálního a integrálního počtu. Půjde zejména o věty Gauss–Ostrogradského, Greenovu a Stokesovu. V této souvislosti se seznámíme s vlastnostmi některých dalších diferenciálních operátorů (divergence, rotace ve třech prostorových dimenzích a Laplaceův operátor) a budeme se věnovat vztahu potenciálnosti daného pole na dané množině a lokálních vlastností studovaného pole spolu s geometrickými vlastnostmi této množiny.*

17.1 Klasická teorie křivkového integrálu

Inspirací pro naši teorii budou následující dva problémy.

(i) Známe rozložení jisté veličiny podél zadané křivky a máme spočítat celkové množství veličiny na uvedené křivce (například máme zadanou lineární hustotu drátu a zajímá nás jeho hmotnost).

Tento problém vede na takzvaný *křivkový integrál prvního druhu*, u něhož nezáleží na tom, v jakém směru při integraci křivkou procházíme.

(ii) Máme spočítat práci při pohybu v silovém poli.

Tento problém, kdy práci vykonává jen tečná složka (vzhledem ke směru pohybu) silového pole, vede na takzvaný *křivkový integrál druhého druhu*, u něhož již není rozhodující jen tvar integrační dráhy (ten někdy dokonce nehraje vůbec žádnou roli a rozhoduje jen poloha koncových bodů), ale záleží také na směru, kterým křivkou procházíme (změna směru se projeví změnou znaménka integrálu).

Poznámka 17.1.1. V této i v následující kapitole budeme poměrně často pracovat s vektory či tenzory. Připomeňme naše značení. Typicky pracujeme v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Potom vektory o N složkách značíme tučným fontem, například $\mathbf{v}$, zatímco vektory mající obecně jiný počet složek než N značíme pomocí šipky, například $\vec{u}$. Pro inverzní zobrazení k zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ (tedy pro zobrazení z $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ bychom správně měli používat značení $\varphi^{\vec{-1}}$. Z typografických důvodů budeme ale používat $\vec{\varphi}^{-1}$. Tenzory (a také matice) značíme pomocí speciálního fontu, například $\mathbb{A}$.

17.1.1 Křivky v $\mathbb{R}^N$

Definice 17.1.2 (Křivky)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ (v případě, že v I leží některý z jeho krajních bodů, jako obvykle v něm uvažujeme jen jednostrannou derivaci, která musí být vlastní). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$: $I \to \mathbb{R}^N$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}|_{I_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, jsou křivky třídy C^1, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, vnitřky těchto intervalů jsou disjunktní a sousední intervaly obsahují příslušný dělící bod. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}^N$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_N'(t)) \neq \mathbf{0} \qquad \text{na } I$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).

Množina $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle := \boldsymbol{\varphi}(I)$ se nazývá *geometrický obraz křivky* $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud existuje $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se tento vektor nazývá *tečný vektor* ke křivce $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a $\boldsymbol{\tau}(t) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{|\boldsymbol{\varphi}'(t)|}$ (pokud $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ existuje a je netriviální) se nazývá *jednotkový tečný vektor*.

Poznámka 17.1.3. (i) Často se místo termínu „křivka třídy C^1" říká „C^1-křivka". Podobně se říká „po částech C^1-křivka".

(ii) Po částech C^1-křivka je vždy spojitá a dílčí intervaly jsou uzavřené s výjimkou intervalů krajních v případě, že I není uzavřený. Spojitost plyne z toho, že sousední dva intervaly příslušného rozkladu na křivky třídy C^1 vždy oba obsahují příslušný dělící bod a hodnota daného zobrazení je v tomto bodě definována jednoznačně.

(iii) Typickým příkladem C^1-křivky je graf C^1-funkce (zobrazení $t \mapsto (t, f(t))$).

(iv) Pokud C^1-křivka není regulární, může mít poměrně „ošklivý“ obraz. Kupříkladu

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \begin{cases} (-t^2, t^2) & \text{pro } t \in (-\infty, 0] \\ (t^2, t^2) & \text{pro } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

je C^1-křivka, jejíž obraz má zlom (obraz je stejný jako graf funkce $t \mapsto |t|$). Tento obraz odpovídá po částech C^1-křivce.
(v) Protože derivace je limitou diferenčních podílů, tečný vektor je limitou sečných vektorů (po jejich vhodném „protažení“).
(vi) Požadavek na existenci oboustranné derivace v definici tečného vektoru brání tomu, aby po částech C^1-křivka měla v dělících bodech dvojici různých tečných vektorů.

Představme si ještě další důležité typy křivek.

Definice 17.1.4 (Jednoduchá a uzavřená křivka)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\boldsymbol{\varphi} \in C(I; \mathbb{R}^N)$ je křivka. Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *jednoduchá*, jestliže platí alespoň jedna z podmínek
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá na I
(ii) $I = [a, b]$ a $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$
a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b).

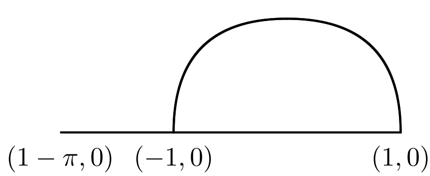
Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *uzavřená*, jestliže $I = [a, b]$ a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$. Řekneme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Poznámka 17.1.5. Jednoduchá křivka je prostá (tedy zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté) s jedinou možnou výjimkou $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.

Příklad 17.1.6. (i) Definujme křivku $\boldsymbol{\varphi}\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{cases} (t + 1, 0) & \text{pro } t \in (-\pi, 0] \\ (\cos t, \sin t) & \text{pro } t \in [0, \pi). \end{cases}$$

Pro představu je $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$ znázorněno na obrázku.



Obrázek 17.1: Obraz křivky φ z Příkladu 17.1.6

Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je spojitá, je třídy C^1 na intervalech $(-\pi, 0]$ a $[0, \pi)$. Proto se jedná o po částech C^1-křivku. Na intervalu $(-\pi, 0)$ máme tečný vektor $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (1, 0)$ a na intervalu $(0, \pi)$ máme tečný vektor $\boldsymbol{\varphi}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. V bodě $t = 0$ tečný vektor neexistuje (liší se jednostranné derivace). Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je regulární (problémy může dělat jen $t = 0$, ale zde jsou jednostranné derivace $(1, 0)$ a $(0, 1)$). Křivka $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá. Není však jednoduchá, protože v obraze se v okolí bodu $(-1, 0)$ jednak vyskytují obrazy intervalů tvaru $(\pi - \delta, \pi)$ a také obrazy intervalů $(-2 - \delta, -2 + \delta)$, tedy φ^{-1} není spojité zobrazení v bodě $(-1, 0)$.

(ii) Definujme křivku $\boldsymbol{\psi}\colon [-2, \pi] \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{cases} (t + 1, 0) & \text{pro } t \in [-2, 0] \\ (\cos t, \sin t) & \text{pro } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Jako v minulém případě se jedná o regulární C^1-křivku. Zřejmě je tato křivka uzavřená. Její prostota je porušena pouze dvojicí koncových bodů intervalu $t_1 = -2$ a $t_2 = \pi$. Navíc ψ^{-1} je spojité ve všech bodech, které jsou obrazem intervalu $(-2, \pi)$ (v obraze se jako problematický jeví bod $(-1, 0)$, ale v něm definice jednoduché křivky nepožaduje spojitost zobrazení ψ^{-1}). Proto je $\boldsymbol{\psi}$ jednoduchá křivka. Dokonce je to křivka Jordanova.

Protože budeme v dalším často pracovat s křivkami zúženými na intervaly, zaveďme značení křivky zvýrazňující její definiční obor $(\boldsymbol{\varphi}, I)$. Pro budování další teorie bude užitečné slepování křivek a obíhání zadané křivky v opačném směru.

Definice 17.1.7 (Součet křivek, křivka opačná)**.** Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ a $(\boldsymbol{\psi}, J)$ jsou křivky v $\mathbb{R}^N$. Nechť $-\infty \leq a_1 \leq b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 \leq b_2 \leq \infty$, $I = (a_1, b_1]$, nebo $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2)$ nebo $J = [a_2, b_2]$ a $\boldsymbol{\varphi}(b_1) = \boldsymbol{\psi}(a_2)$. Pak definujeme *součet křivek* $\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi}$ předpisem

$$(\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & \text{pro } t \in I \\ \boldsymbol{\psi}(t - b_1 + a_2) & \text{pro } t \in K \setminus I, \end{cases}$$

kde interval K je dán vzorcem $K = I \cup (J - a_2 + b_1)$ (interval J jsme posunuli, aby navazoval na I, tedy $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1)$ respektive $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1]$).

Opačnou křivkou ke křivce $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ nazýváme křivku $(\ominus\boldsymbol{\varphi}, -I)$ danou předpisem

$$\ominus\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(-t) \qquad \text{pro } t \in -I.$$

Povšimněte si, že pro regulární po částech C^1-křivky je výsledkem právě zadefinovaných operací opět regulární po částech C^1-křivka.

17.1.2 Křivkový integrál prvního a druhého druhu

Definice 17.1.8 (Křivkový integrál prvního a druhého druhu)**.** Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, I)$ je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$. Jestliže $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na

$\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$, pak *křivkový integrál prvního druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s := \int_I f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,\mathrm{d}t, \qquad \text{kde } \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| := \sqrt{{\varphi_1'}^2(t) + \cdots + {\varphi_N'}^2(t)},$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

Jestliže $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole definované na $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$, pak *křivkový integrál druhého druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} := \int_I \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t$$

(v integrandu napravo je pro s.v. $t \in I$, přesněji až na konečně mnoho bodů z I, skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^N$), pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

Poznámka 17.1.9. (i) Připomeňme, že pro C^1-křivky jsme si už v kapitole o Riemannovu integrálu představili $\int_\varphi 1\,\mathrm{d}s$ jako délku křivky.
(ii) Připomeňme, že $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|$ je eukleidovská norma vektoru $\boldsymbol{\varphi}'(t)$. V kapitole věnované metrickým prostorům jsme ji značili $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|_2$.

Poznámka 17.1.10. Pro křivkový integrál druhého druhu se často používá značení ($\boldsymbol{F} = (F_1,\dots,F_N)$)

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + F_N\,\mathrm{d}x_N,$$

které je motivováno rozepsáním pravé strany z definičního vztahu pomocí jednotlivých složek

$$\int_I \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \big(F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + F_N(\varphi(t))\varphi_N'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Formálně tedy $\mathrm{d}x_i = \varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t$. Další souvislosti si ukážeme v další kapitole věnované integraci diferenciálních forem.

Příklad 17.1.11. (i) Spočítejme $I := \int_{\boldsymbol{\varphi}}(x^2+y)\,\mathrm{d}s$ pro křivku $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1,1) + t(-1,1)$, kde $t \in [0,1]$. Podle definice máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \big((1-t)^2 + (1+t)\big)\sqrt{(-1)^2+1^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^1 (2-t+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{11\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

(ii) Spočítejme $J := \int_{\boldsymbol{\varphi}}(x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y)$ pro křivku $\boldsymbol{\varphi}(t) := (\cos t, \sin t)$, kde $t \in [0,\pi]$. Podle definice máme

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi (\cos t, -\sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi 2\cos t\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi \sin(2t)\,\mathrm{d}t = -\Big[-\frac{1}{2}\cos(2t)\Big]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$