1 Matematika, logika a odhady

Matematika slouží jako základní nástroj k fyzikálnímu popisu světa, a proto se jejímu studiu ve škole i v našem semináři věnuje nemalé množství pozornosti. Jeden rozměr tohoto úsilí spočívá v memorování vzorečků, výpočetních postupů a učení vlastností základních matematických objektů. Osvojení si těchto dovedností jistě má svou užitečnost, nicméně byla by chyba na matematiku nahlížet pouze jako na řemeslo.

Mnoho matematických postupů, které považujeme za samozřejmé, totiž v sobě obsahuje hlubokou moudrost, která je dnešním očím ztracena. Podívejme se např. na všem známý zápis desetinných čísel pomocí *arabských číslic* a *desítkové soustavy.* Např. zlomek 12/10 zapíšeme jako:

$$\frac{12}{10} = 1{,}2 = 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} \,.$$

Tento postup nikdo nepovažuje za problematický, a tak se nikdo nepozastaví, pokusíme-li se zapsat číslo 1/3:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \cdots = 3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \,.$$

V poslední úpravě jsme použili již středoškolský zápis pomocí sumy, který je nad rámec této knihy. Snažíme se nicméně ilustrovat, že takové jednoduché číslo vlastně běžně chápeme jako nekonečný součet čísel a opíráme se tak o pokročilé znalosti matematické analýzy, které otevřeli dveře Isaac Newton a Gottfried Leibniz.

V následujících úlohách tak máte možnost použít matematické nástroje k popsání problémů z reálného života. Snad vám také ale některá z úloh umožní nahlédnout na známé postupy a spatřit je v jiném světle. Jako první takovou úlohu nabízíme hned níže experiment s házením jehel.

Buffonova jehla

V tomto experimentu určíme experimentálně hodnotu konstanty π pomocí házení jehel na zem. Na list papíru (ideálně větší než A4) nebo velký rovný karton nejprve nakreslíme v rovnoměrné vzdálenosti od sebe rovnoběžky. Dále si připravíme několik jehel či špejlí o délce rovné rozestupu mezi čarami. Nejvíce se osvědčily sirky, protože ty mají vždy stejnou délku a jsou levné (čáry lze nakreslit podle nich). Následně jehly, resp. sirky házíme na podklad tak, aby na něj pokud možno dopadaly náhodně. Zaznamenáme si pak počet těch, které protly některou z čar n a počet všech hozených N. *Tip:* měření se dá zrychlit tím, že jehel/sirek vyhodíme vždy naráz velkou spoustu. Hledané počty tím můžeme každým pokusem navyšovat o desítky.

Francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon spočítal, že pravděpodobnost, že náhodně spadlá jehla protne čáru, činí $p = 2/\pi$. Pokud tedy učiníme hodně hodů, můžeme odhadnout pravděpodobnost jako poměr jehel: $p \approx n/N$. Poté lze již jednoduše vyjádřit pí jako $\pi \approx 2N/n$.

Ačkoliv odvození Buffonova výpočtu zde pro složitost provádět nebudeme, jedná se o zábavný experiment, který nachází populární konstantu na nečekaném místě. Chcete-li tento experiment ještě urychlit a zjednodušit, lze jej s trochou snahy převést do digitální podoby buď přímým programováním, nebo bez větších matematických znalostí realizovat graficky v blokovém programovacím systému, jako je třeba Scratch, který je v současnosti populární ve výuce informatiky.

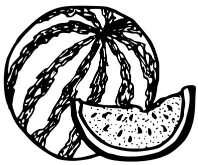
Tento experiment můžeme brát jako kuriozitu, neboť většina lidí by spojení mezi populární konstantou a náhodným procesem nečekala. Možná se zdá dokonce poněkud „mimo“ matematiku, neboť ve škole se s matematikou setkáváme jako s hotovým produktem – máme zadaná nějaká pravidla, která se musíme naučit a replikovat je pro výpočet příkladů. V lepším případě se učíme matematické věty, které však již byly dávno vyzkoumány a jejich důkaz co nejvíc zjednodušen. Chtěli bychom však připomenout, že opravdová matematika není takto sterilní. V matematice nehledáme pouze nová tvrzení, nýbrž se pokoušíme o to myšlenkově poznat svět. Práce matematiků proto nespočívá pouze v recitaci rigorozních pouček, ale v organickém hledání poznání, které je často plné nejistoty. I proto má ve vědě místo odvětví *experimentální matematiky*.

Zadání úloh

Úloha 1 ... Meloun

(řešení na str. 13)

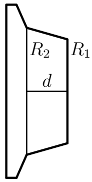
Pavla šla jednoho jarního dne na trh a koupila si dokonale kulatý meloun s poloměrem r. Položila ho na zem a odborně provedla svislý řez středem melounu. Obě melounové polokoule se po rozříznutí od sebe odvalily, chvíli se kymácely a nakonec se jejich pohyb vlivem valivého odporu zastavil. Pomůžete Pavle zjistit, jak jsou od sebe vzdálené středy polokoulí?



Úloha 2 ... Vlak v zatáčce

(řešení na str. 14)

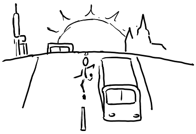
Když auto projíždí zatáčkou, musí kolo, které jede po vnějším oblouku, urazit delší dráhu. K tomu slouží takzvaný diferenciál, který umožní otáčet každým kolem zvlášť. Vlak ale nemá diferenciál. Aby vnější kolo mohlo urazit delší dráhu, mají jeho kola tvar jako na obrázku. A jak jste si možná všimli při jízdě vlakem, jsou vlakové oblouky[1] klopené tak, že se vlak nakloní „dovnitř“ do oblouku. Představte si, že by vlak neustále jezdil po kruhové dráze, která by byla vhodně sklopená. Jaký nejmenší poloměr může mít kružnice, na níž bude ležet vnitřní kolejnice? Znáte poloměry R_1, R_2, tloušťku d a rozchod kolejnic s.



[1] Oblouk je slovo, které v kontextu vlaků a kolejí značí zatáčku.

Úloha 3 ... MHD v Olomouci

(řešení na str. 14)



Franta si vyrazil na výlet do Olomouce. Přijel na hlavní nádraží, a protože neměl drobné, šel do města pěšky.

Po cestě si všiml, že tramvaj číslo 1 jej v protisměru míjí s intervalem $T_\mathrm{p} = 10\,\mathrm{min}\ 48\,\mathrm{s}$ a stejná linka jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_\mathrm{v} = 13\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{s}$.

Cestou domů spočítal interval T, ve kterém tramvaje jezdí (za předpokladu, že je v obou směrech stejný). K jakému výsledku došel?

Úloha 4 ... Křížaly

(řešení na str. 15)

Pavla měla doma 10 kg jablek, a protože má velice ráda křížaly (sušená jablka), usmyslela si, že všechna jablka usuší. Rozkrájela je tedy na tenké plátky a nechala je pořádně proschnout. Když jablka vyschla, Pavla zjistila, že má pouze 4 kg křížal. Bylo jí hned jasné, že je to způsobeno odpařením vody z jablek. Jelikož je velmi zvídavá, rozhodla se spočítat, kolik váží voda, která v křížalách zbyla. Pomůžete to Pavle spočítat, jestliže víte, že před sušením voda v jablkách tvořila 80 % jejich hmotnosti?

Úloha 5 ... Sněhuláci

(řešení na str. 16)

Pavla a Verča se těší na Vánoce, a tak si doma vyrobily sněhuláky. Oba sněhuláci se skládají ze tří nepřekrývajících se částí s poloměry 1 cm, 2 cm a 3 cm. Pavla sněhuláka vyrobila z drátu (sněhulák se tedy skládá ze tří kružnic), Verča ho vystřihla z kartonu (sněhulák je tedy vyroben ze tří kruhů). Vypočtěte, který ze sněhuláků má těžiště níž a o kolik se liší polohy jejich těžišť.

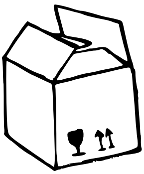
Úloha 6 ... Kvadratura koberce

(řešení na str. 17)

Výfuček se rozhodl za získané peníze něco hezkého koupit, a tak se vydal na tržiště. Jeden kupec mu nabídl desetimetrový pravý létající koberec. Výfuček se však nechtěl nechat ošidit, a proto se rozhodl kupcovo tvrzení otestovat. Bohužel měl jen svinovací metr, koberec byl namotaný na tyči a nebylo možné ho v malém prostoru zakouřeného stanu roztáhnout. Výfuček si tedy změřil, že obvod tyče, na které je koberec namotán, je $o = 0{,}30\,\mathrm{m}$ a obvod obvázaného koberce je $O = 1{,}7\,\mathrm{m}$. Dále si všiml, že koberec je kolem tyče omotán desetkrát. Pomozte Výfučkovi odhadnout délku koberce a ověřit tak, že kupec říká pravdu.

Úloha 7 ... Uklízení

(řešení na str. 18)



Jindra si řekl, že konečně nastal čas na jarní úklid. Do kartonové krabice se vleze 5 kg nestlačeného papíru. Tento papír Jindra sešlápnul na polovinu objemu a opět krabici doplnil. Výsledný objem potom zase stlačil (nestlačený papír se stlačuje na polovinu, stlačený se již dále nestlačuje). Takto postup opakoval, dokud to bylo možné. Kolik kg papíru se v krabici nacházelo po třech opakováních? A kolik když byl Jindra s uklízením hotový (tj. když postup zopakoval hrozně mockrát)?