1.1.4 Vektory na varietě

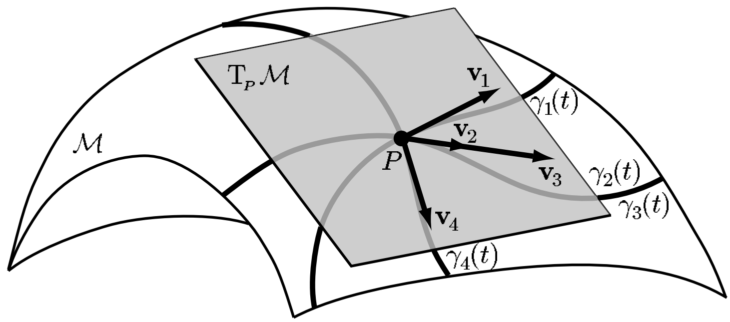
Začněme intuitivní motivací:

Vektor $\mathbf{v}$ v bodě $P \in \mathcal{M}$ lze chápat jako $\boxed{\text{tečnu ke křivce } \gamma(t)}$ procházející P.

Vektor $\mathbf{v}$ má

- daný *směr* (určený lokálním směrem křivky $\gamma(t)$ v bodě P),
- danou *velikost* (určenou velikostí změny $\gamma(t)$ se změnou t, tedy rychlostí parametrizace v okolí bodu P).

Tečný prostor $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$:
Bodem $P \in \mathcal{M}$ procházejí ***různé křivky s různými parametrizacemi***. Množina všech jimi určených vektorů vytváří $\boxed{\text{tečný prostor } \mathrm{T}_P\mathcal{M}}$ k varietě $\mathcal{M}$ v bodě P.



Obrázek 1.5: Vektory $\mathbf{v}$ tečné ke všem křivkám $\gamma(t)$ v bodě P variety $\mathcal{M}$ tvoří tečný prostor $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$. Jak $\mathcal{M}$ tak i $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$ mají stejnou dimenzi n (zde $n = 2$).

Upřesnění definice a důležité poznámky:

- Ve skutečnosti jsou vektory $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_P\mathcal{M}$ takzvanými *třídami ekvivalence* tečen ke $\gamma(t)$ v bodě P, neboť daným směrem a danou rychlostí prochází bodem P nekonečně mnoho různých křivek. Vektor $\mathbf{v}$ tedy ztotožňujeme

  $\boxed{\text{s třídami ekvivalence křivek } \textit{stejného směru a rychlosti} \text{ v } P}$.

  To poznáme z jejich *vyjádření v lokálních souřadnicích*: mají totiž v bodě $P \equiv (x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$ stejné hodnoty derivací $(\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0))$.

- Zatímco obraz křivky $\gamma(t)$ leží v $\mathcal{M}$, vektory $\mathbf{v}$ leží v $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$, nikoli ve varietě $\mathcal{M}$.

- $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$ je ***lineární vektorový prostor***.

- Lze nahlédnout, že ***dimenze*** $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$ je stejná jako dimenze $\mathcal{M}$, tedy $\boxed{n}$.

- V každém bodě $P \in \mathcal{M}$ existuje ***báze*** $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$, tedy $\boxed{\mathbf{v} = v^i\,\mathbf{e}_i}$, kde $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ jsou bázové vektory a v^i jsou jednotlivé složky vektoru $\mathbf{v}$ v dané bázi (zde používáme sumační konvenci).

Vektor coby diferenciální operátor:

Uvažujme nyní:

- hladkou funkci f na varietě $\mathcal{M}$,
- křivku $\gamma(t)$ procházející bodem $P \in \mathcal{M}$; ta určuje tečný vektor $\mathbf{v} \in \mathrm{T}_P\mathcal{M}$.

Funkce $f\big(\gamma(t)\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tedy udává hodnotu f podél γ, přičemž parametr t je nezávislá proměnná. Nyní provedeme derivaci f „ve směru vektoru $\mathbf{v}$“ v (okolí) parametru t_0, neboli[7]

$$\frac{\mathrm{d}f\,(\gamma(t_0))}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\gamma(t_0 + \Delta t)) - f(\gamma(t_0))}{\Delta t}\,, \tag{1.3}$$

kterou lze chápat jako *lineární operaci*, která funkci f přiřazuje v P číslo $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. Můžeme tedy na vektor $\mathbf{v}$ začít nahlížet jako na ***diferenciální operátor***, který operuje na funkcích f. Odmyslíme-li si f, což je libovolná hladká funkce, zbyde totiž z derivace $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ samotný operátor $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}$.

V lokální souřadnicové mapě $(\mathcal{U}, \phi)$ má křivka $\gamma(t)$ vyjádření $x^i(t)$, a v bodě $P \equiv \gamma(t_0)$ proto lze psát relaci[8]

$$\mathbf{v}(f) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}f\,(\gamma(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(x^i(t)\right) = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\,, \tag{1.4}$$

kde jsme označili $v^i \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$. Odmyslíme-li si nyní f, dostáváme formálně operátor

$$\boxed{\mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} = v^i \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x^i}}\,. \tag{1.5}$$

V symbolickém zápise operátoru $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}$ píšeme $\mathbf{d}$ tučně, abychom naznačili, že se jedná o *vektor* (ztotožněný s $\mathbf{v}$). Když tento vektorový operátor *aplikujeme* na funkci f, je výsledkem obyčejná derivace $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. To je *funkce*, a proto již d tučně nepíšeme. Z konstrukce vidíme, že hodnota $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \mathbf{v}(f)$ ***je derivace funkce*** f ***ve směru*** $\mathbf{v}$, který je v P tečný ke konkrétní křivce $\gamma(t)$.

---

[7] Obraz $\gamma(t_0)$ popisuje bod P. Obraz $\gamma(t_0 + \Delta t)$ popisuje bod, který leží na křivce γ (mající v P tečný vektor $\mathbf{v}$) a má hodnotu parametru t_0 zvětšenou o Δt oproti hodnotě odpovídající bodu P.

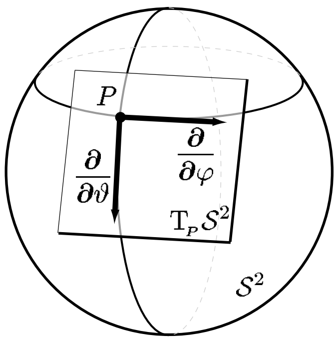
[8] Kdybychom chtěli být opravdu pečliví, měli bychom rozlišovat funkci f *na varietě* $\mathcal{M}$ (tedy $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$) od její *souřadnicové reprezentace* $\tilde{f}$ na konkrétní mapě $(\mathcal{U}, \phi)$ v $\mathbb{R}^n$ (tedy $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Platí vztah $\tilde{f} = f(\phi^{-1})$, viz obrázek 1.3. Podél křivky $\gamma(t)$ tedy je $\tilde{f}\big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big) = \tilde{f}\big(\phi(\gamma(t))\big) = f\big(\gamma(t)\big) = f\big(\phi^{-1}(x^1(t), \ldots, x^n(t))\big)$.

Srovnáním (1.5) s obecným výrazem $\mathbf{v} = v^i\,\mathbf{e}_i$, kde $\mathbf{e}_i$ je báze $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$ a v^i jsou složky $\mathbf{v}$ vůči této bázi, je vidět, že

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\ \text{je tzv. } \textbf{\textit{souřadnicová báze}} \text{ tečného prostoru } \mathrm{T}_P\mathcal{M}}\,. \qquad (1.6)$$

Operátory parciálních derivací $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ reprezentují *tečné vektory k souřadnicovým čarám* x^i, neboli jsou to derivace ve směru příslušných souřadnicových čar lokální mapy.

Příklad: Na sféře $\mathcal{S}^2$ je tečným prostorem $\mathrm{T}_P\mathcal{S}^2$ v bodě P rovina. Bázi tohoto vektorového prostoru tvoří například dvojice vektorů $\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$. To znamená, že každý vektor v tečné rovině $\mathrm{T}_P\mathcal{S}^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektoru $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ mířícího ve směru místního poledníku a vektoru $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ mířícího ve směru místní rovnoběžky. Mapa nezahrnuje severní ani jižní pól.



1.1.5 Formy na varietě

1-forma $\boldsymbol{\alpha}$ v bodě $P\in\mathcal{M}$ je $\boxed{\text{lineární funkcionál na vektorech}}$ z $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$, tedy platí

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \text{číslo} \in \mathbb{R}\,, \qquad (1.7)$$
$$\boldsymbol{\alpha}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}_1) + c_2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}_2)\,.$$

Stejně jako vektor má i 1-forma svoji velikost a orientaci.

Kotečný prostor:

Všechny formy v bodě $P\in\mathcal{M}$ tvoří lineární vektorový prostor nazývaný ***kotečný prostor*** $\mathrm{T}^*_P\mathcal{M}$ k varietě $\mathcal{M}$ v bodě P. Kotečný prostor $\mathrm{T}^*_P\mathcal{M}$ je duální k $\mathrm{T}_P\mathcal{M}$.

Vztah vektorů a 1-forem:

Vektory a 1-formy v bodě $P\in\mathcal{M}$ jsou navzájem duální. Jejich interakce je dána operací „působení 1-formy na vektor“ z definice (1.7), kterou lze též chápat jako