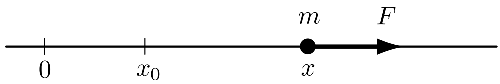
Příklad 1-1.

Částice hmotnosti m je odpuzována sílou F, která je nepřímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti od počátku prostorové souřadnice x. Vyřešte pohyb částice vypuštěné z klidu z místa $x_0 > 0$.



Řešení: Nejprve zapíšeme zadanou sílu pomocí vzorce, tedy

$$F = \frac{k}{x^3}\,, \tag{1.7}$$

kde k je *kladná* konstanta. ***Newtonův pohybový zákon*** proto má tvar

$$\boxed{m\,\ddot{x} = \frac{k}{x^3}}\,. \tag{1.8}$$

To je nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro hledanou funkci $x(t) \geq x_0 > 0$. Vyřešíme ji následujícím ***trikem***: obě strany ***vynásobíme rychlostí*** $\dot{x}$, tedy

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} = k\,\frac{\dot{x}}{x^3}\,.$$

Tuto rovnici *lze ekvivalentně přepsat* do podoby

$$m\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}^2\right)^{\bullet} = k\left(-\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}\right)^{\bullet},$$

kde (záměrně zvětšené) tečky za závorkami značí časovou derivaci výrazů uvnitř závorek. Integraci nyní provedeme snadno „pouhým smazáním teček“ (protože výrazy v závorkách jsou příslušné primitivní funkce) a přidáním (společné) integrační konstanty E. Tím najdeme ***první integrál pohybové rovnice*** ve tvaru

$$\boxed{\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 = -\frac{k}{2}\,\frac{1}{x^2} + E}\,. \tag{1.9}$$

Vlastně jsme v tomto případě odvodili ***zákon zachování mechanické energie*** $T + V = E$, neboť výraz na levé straně je *kinetická energie* T, zatímco první člen na pravé straně je $-V$, tedy záporně vzatá *potenciální energie* $V \equiv -\int F(x)\,\mathrm{d}x$ příslušející konzervativní síle (1.8).

Zbývá tedy najít obecné řešení diferenciální rovnice (1.9), která je 1. řádu. To provedeme standardní metodou ***separace proměnných*** x a t,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x} = \sqrt{-\frac{k}{m}\,\frac{1}{x^2} + \frac{2E}{m}} = \frac{1}{x}\,\sqrt{\frac{2E}{m}\,x^2 - \frac{k}{m}}\,,$$

kde v souladu se zadáním úlohy uvažujeme jen $\dot{x} \geq 0$, což vede na

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2E}{m}\,x^2 - \frac{k}{m}}} = \int \mathrm{d}t = t - t_0\,.$$

Substitucí $y \equiv \frac{2E}{m}\,x^2 - \frac{k}{m}$ převedeme integrál na

$$\frac{m}{4E}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}\,,$$

který již snadno najdeme. Výsledek je $y = (\frac{2E}{m})^2(t-t_0)^2$. Po dosazení za substituci y a úpravě dostaneme ***obecné řešení*** Newtonovy pohybové rovnice (1.8) ve tvaru

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}\,(t-t_0)^2 + \frac{k}{2E}}}\,. \tag{1.10}$$

Řešení obsahuje *dvě libovolné integrační konstanty* E a t_0, které určíme ze zadaných ***počátečních podmínek*** v čase $t = 0$. Počáteční poloha je x_0 a počáteční rychlost je nulová, tedy

$$x(0) = x_0\,, \qquad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Dosazením do (1.9) dostaneme $E = \frac{k}{2}\,x_0^{-2}$ a z (1.10) pak plyne, že $t_0 = 0$. Explicitní řešení této konkrétní úlohy tedy má tvar

$$\boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{k\,t^2}{mx_0^2}}}\,. \tag{1.11}$$

Vidíme, že v $t = 0$ je částice opravdu v místě x_0, vlivem působící síly (1.7) se od něj vzdaluje. Asymptoticky pro velké časy platí vztah $x \approx \sqrt{\frac{k}{mx_0^2}}\,t$, tedy vzdálenost roste lineárně a rychlost se bude blížit konstantě $\sqrt{\frac{k}{mx_0^2}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. To je plně v souladu se zákonem zachování energie (1.9) pro velké hodnoty x. Nelze volit počáteční polohu $x_0 = 0$, protože v tomto místě síla (1.7) diverguje.

Poznámka: Sílu tvaru (1.7) lze realizovat odpuzováním malé částice s elektrickým nábojem e vlivem působení *elementárního dipólu* $\mathbf{p}$, jehož pole je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right].$$

Na ose $\mathbf{r} = (x,0,0)$ dipólu orientovaného $\mathbf{p} = (p,0,0)$ tedy působí síla $F = k\,x^{-3}$, kde $k = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,ep$.

⊠