5 Řešení pohybové rovnice; kmitání

5.1 Potřebná matematika

5.1.1 Pohybová rovnice — 2. Newtonův zákon

Budeme řešit pohybovou rovnici pro jednu částici (tak nazýváme pro stručnost hmotný bod) o hmotnosti $m > 0$, nepodrobenou vazbám (tj. omezením pohybu), na kterou působí výsledná vnější síla $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}$. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad . \tag{5.1}$$

V jednorozměrných případech, kterými se budeme dále zabývat, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = F \quad . \tag{5.2}$$

Tuto rovnici budeme v dalším řešit pro různé konkrétní tvary síly $F(x,t)$. Řešení uvažujeme pro $t \geq 0$, přičemž pro $t = 0$ máme zadány počáteční podmínky:

$$\text{počáteční poloha} \quad x_0 = x|_{t=0} \quad , \tag{5.3}$$

$$\text{počáteční rychlost} \quad v_0 = v|_{t=0} \quad . \tag{5.4}$$

5.1.2 Homogenní rovnice

Pohybová rovnice bývá v nejjednodušších případech *homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, tedy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} = 0 \quad , \tag{5.5}$$

kde a_k jsou konstanty (obecně komplexní), N je řád diferenciální rovnice (v Newtonově zákonu $N = 2$) a $x(t)$ je neznámá funkce času — zpravidla souřadnice popisující pohyb částice.

Řešení rov. (5.5) hledáme ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \quad . \tag{5.6}$$

Dosazením do rov. (5.5) získáme

$$(\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k)\, \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \quad , \tag{5.7}$$

a protože $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$, dostáváme polynomiální **charakteristickou rovnici**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0 \quad , \tag{5.8}$$

která má obecně N kořenů λ_m, vedoucích na N řešení $\mathrm{e}^{\lambda_m t}$. Obecné řešení rov. (5.5) je jejich lineární kombinace

$$x(t) = \sum_{m=0}^{N} C_m\, \mathrm{e}^{\lambda_m t} \quad , \tag{5.9}$$

kde (komplexní) konstanty C_m zvolíme tak, aby vyhovovaly *počátečním podmínkám* (obvykle podmínkám na x a všechny vyšší derivace v čase $t = 0$).

Pokud však některé kořeny splývají, např. je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_K$, neboli K-násobný (také K-krát **degenerovaný**, viz str. 277) kořen λ, bylo by $K > 1$ funkcí $\mathrm{e}^{\lambda_k t}$ lineárně závislých. Místo nich jsou však řešením jiné funkce, a to $t^k\, \mathrm{e}^{\lambda t}$ pro $k = 0, 1, \ldots, K-1$. Řešením je tedy

$$x(t) = \mathrm{P}^{K-1}(t)\, \mathrm{e}^{\lambda t} \quad , \tag{5.10}$$

kde $\mathrm{P}^{K-1}(t)$ je polynom v proměnné t, jehož stupeň je roven $K-1$.

5.1.3 Nehomogenní rovnice

Pokud lineární diferenciální rovnice není homogenní, tj. pokud má tvar

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} = F(t), \tag{5.11}$$

pak

1. vyřešíme nejprve v celé obecnosti rovnici homogenní;
2. uhodneme libovolným způsobem jedno řešení rov. (5.11) (tzv. partikulární řešení);
3. obecným řešením nehomogenní rovnice je pak součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení nehomogenní rovnice.

5.2 Konkrétní tvary síly

5.2.1 Nulová síla: $F = 0$

Pokud na částici nepůsobí žádná výsledná síla, tedy pokud je výslednice $\vec{F}_\Sigma$ všech vnějších sil ve směru x nulová, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = 0 \quad . \tag{5.12}$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme, čímž dostaneme řešení

$$\ddot{x} = 0 \quad , \tag{5.13}$$
$$\dot{x} = v_0 \quad , \tag{5.14}$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t \tag{5.15}$$

odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu podél zvolené osy $\mathbf{x}$ s rychlostí v_0 a počáteční polohou $x_{(t=0)} = x_0$.

Z hlediska teorie v odst. 5.1.2 jde v tomto i v následujícím příkladu o dvojnásobnou degeneraci — dvojnásobný kořen $\lambda = 0$, a jsme tedy zatím exponenciál ušetřeni.

5.2.2 Konstantní síla: $F = F_0$

Konstantní síla F_0 působící na částici jí uděluje konstantní zrychlení $a = F/m$. Pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \tag{5.16}$$

má rovněž zřejmé řešení (s toutéž interpretací x_0 a v_0)

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \quad , \tag{5.17}$$
$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m} t \quad , \tag{5.18}$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m} t^2 \quad . \tag{5.19}$$

Známým příkladem je **volný pád** {*free fall*} z výšky $z = h$. Počáteční rychlost je nulová ($v_0 = 0$), působící síla je $F_0 = -mg$ při obvyklé orientaci osy $\mathbf{z}$ vzhůru, takže řešení je

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{5.20}$$

Podobně **svislý vrh** z výšky $z = h_0$ vzhůru rychlostí $v_0 > 0$ má řešení

$$z(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \tag{5.21}$$

Vrh dolů řešíme přesně stejně, jen bereme $v_0 < 0$.

5.2.3 Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$

Ve fyzice nazýváme **harmonickým oscilátorem**{˜} částici mající jistou rovnovážnou polohu x_r a podrobenou síle, např. pružině, která ji při vychýlení vrací do této polohy, a to tím více, čím více je vzdálena od rovnovážné polohy. Součinitelem úměrnosti je **součinitel tuhosti**, zpravidla stručně **tuhost**{*stiffness*} $k > 0$ pružiny, její převrácená hodnota je **poddajnost**{*compliance*}. Zvolíme-li pro jednoduchost počátek osy **x** právě v bodě x_r, má síla tvar

$$F(x) = -kx \quad , \tag{5.22}$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} = -kx \quad . \tag{5.23}$$

Zapíšeme ji v obvyklém anulovaném tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad , \tag{5.24}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad . \tag{5.25}$$

Protože platí $m > 0$ i $k > 0$, můžeme zavést

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0 \quad . \tag{5.26}$$

Obvyklým postupem hledáme řešení ve tvaru $\mathrm{e}^{\lambda t}$, čímž dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{5.27}$$

s řešením

$$\lambda = \pm\,\mathrm{i}\,\omega_0 \tag{5.28}$$

Připomeňme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, **Eulerův vzorec**, φ měříme v radiánech.

Fyzikálně relevantní řešení je ovšem jen reálná funkce; můžeme ji zapsat kterýmkoli z dále uvedených tvarů, vždy se dvěma konstantami volitelnými podle počátečních podmínek (označení indexů 1, 2 u φ, t, C je libovolné). Značíme-li x_m amplitudu (maximální výchylku), je okamžitá poloha

$$\begin{aligned}
x &= x_\mathrm{m}\sin(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad (x_\mathrm{m}, \varphi_1) \quad , && (5.29)\\
&= x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \qquad (x_\mathrm{m}, \varphi_2) \quad , && (5.30)\\
&= x_\mathrm{m}\sin(\omega_0 (t - t_1)) \qquad (x_\mathrm{m}, t_1) \quad , && (5.31)\\
&= x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 (t - t_2)) \qquad (x_\mathrm{m}, t_2) \quad , && (5.32)\\
&= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad (A, B) \quad , && (5.33)\\
&= \ldots \\
&= \Re\, C_\pm\, \mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,\omega_0 t} \qquad (\text{komplexní } C_\pm = C_{1\pm} + \mathrm{i}\,C_{2\pm}) \quad . && (5.34)
\end{aligned}$$