Kapitola 21

Fourierova transformace

Shrnutí kapitoly: *V této kapitole se budeme věnovat Fourierově transformaci, což je důležitá integrální transformace s mnoha aplikacemi v matematické fyzice. Nejprve představíme Schwartzův prostor a dokážeme si jeho základní vlastnosti, poté se budeme zabývat Fourierovou transformací na Schwartzově prostoru a na prostorech* $L^1(\mathbb{R}^N)$ *a* $L^2(\mathbb{R}^N)$*. Nakonec si ukážeme některé aplikace Fourierovy transformace na řešení diferenciálních rovnic.*

V kapitole o Fourierových řadách jsme si představili metodu řešení diferenciálních rovnic, která využívala proces, kdy jsme funkci $f \in L^1((a, a+l))$ nahradili posloupností jejích Fourierových koeficientů (vzhledem k trigonometrickému systému). Upřednostníme-li komplexní zápis Fourierovy řady, pak mají námi používané vzorce tvar

$$F_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}$$

a

$$c_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{l}x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Tento proces nyní zmodifikujeme. Nebudeme Fourierův koeficient přiřazovat pouze číslu $k \in \mathbb{Z}$, ale každému číslu $\xi \in \mathbb{R}$ pomocí předpisu

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

čímž dostaneme funkci tvořenou Fourierovými koeficienty, které se říká *Fourierova transformace* funkce f. Zároveň došlo k tomu, že původní perioda délky l byla prodloužena na celé $\mathbb{R}$.

Fourierova transformace má následující fyzikální interpretaci. Pokud uvažujeme případ jedné prostorové dimenze, převádí nám Fourierova transformace informace o signálu zadaném jako intenzita signálu v závislosti na čase na intenzitu signálu v závislosti na frekvenci. Ve více dimenzích je pak součin proměnných přirozeně rozšířen pomocí skalárního součinu.

Opět nás bude zajímat, pro které prostory funkcí je funkce $\mathcal{F}(f)$ definovaná a zda je možné z tvaru funkce $\mathcal{F}(f)$ získat zpětně předpis pro funkci f. Uvedený předpis bude mít tvar (platí ale jen někdy)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x} \,\mathrm{d}\xi.$$

Zároveň zjistíme, že Fourierova transformace má řadu pozoruhodných vlastností, které ji staví do role mocného nástroje při hledání řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, ale i získávání informací o vlastnostech funkcí. Opět se však nebude jednat o nástroj univerzální. Při počítání Fourierovy transformace a „zpětné“ Fourierovy transformace se budeme běžně setkávat s obtížně spočítatelnými integrály. Často nám v takových případech pomohou metody výpočtu integrálů, které jsme si osvojili při studiu komplexní analýzy. V celé kapitole budeme typicky uvažovat funkce $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$.

21.1 Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Abychom dostali výsledky aplikovatelné i na parciální diferenciální rovnice (zde zatím trpíme až tragickým nedostatkem metod řešení), budeme se muset naučit transformovat rovněž funkce více proměnných a jejich parciální derivace. Připomeňme zde zkrácené značení, kdy pro *multiindex* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ píšeme

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

(nulanásobnou parciální derivaci chápeme tak, že podle uvedené proměnné nederivujeme). Značíme ještě

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \qquad \text{a} \qquad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_N^{\alpha_N}$$

(číslo $|\alpha|$ se nazývá *výška multiindexu* α). V souladu s tímto značením se často píše $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$. Konečně $\alpha \leq \beta$ znamená, že $\alpha_i \leq \beta_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, N$.

V celé teorii Fourierovy transformace budeme eukleidovskou normu prvku $x \in \mathbb{R}^N$ značit $|x|$.

Poznámka 21.1.1. Nejčastěji budeme pracovat s nekonečně hladkými funkcemi. U nich jsou parciální derivace záměnné.

Příklad 21.1.2. Nechť $N = 4$ a $\alpha = (1, 3, 0, 5)$. Pak pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^9 f}{\partial x_1 \partial x_2^3 \partial x_4^5} \qquad \text{a} \qquad x^\alpha = x_1 x_2^3 x_4^5.$$

Podobně jako teorii Fourierových řad, i teorii Fourierovy transformace budeme budovat v několika krocích. Nejprve se seznámíme s prostorem funkcí, který není příliš bohatý, ale nabízí snadné získání nejdůležitějších výsledků.

Definice 21.1.3 (Schwartzův prostor)**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{21.1.1}$$

Příklad 21.1.4. (i) Zřejmě platí $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(ii) Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2}$ patří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) Žádná netriviální racionální lomená funkce není v $S(\mathbb{R}^N)$ vlivem nedostatečného poklesu na okolí nekonečna.
(iv) Funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ nepatří do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, neboť nemá dostatečnou hladkost.

Definice 21.1.5 (Konvergence ve Schwartzově prostoru)**.** Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci f ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

Poznámka 21.1.6. Konvergence ve Schwartzově prostoru neodpovídá žádné normě. K tomu se vrátíme v dalším díle skript.

Poznámka 21.1.7. Není těžké vidět, že podmínku (21.1.1) z definice Schwartzova prostoru (Definice 21.1.3) lze ekvivalentně vyjádřit i jinak, totiž

$$\||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$$

nebo

$$\|(1+|x|)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$$

nebo

$$\|(1+|x|^2)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Kupříkladu vždy máme $|x|^\alpha \le (1+|x|)^\alpha$ a na druhou stranu můžeme využít odhady

$$(1+|x|)^\alpha \le \begin{cases} 2^{|\alpha|}|x|^\alpha & \text{pro } |x| \ge 1 \\ 2^{|\alpha|} & \text{pro } |x| \le 1, \end{cases}$$

odkud dostáváme

$$\|(1+|x|)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le 2^{|\alpha|} \||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + 2^{|\alpha|} \|D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$