22.4 Příklady a aplikace

Příklad 22.4.1. Nechť $0 < a \leq b$. Spočítejme $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)})$. Použijeme Větu o vyjádření inverze reziduem (Věta 22.3.8), jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny. Nejprve uvažujme případ $a < b$. Pak máme pro každé $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\Big)(t) \\
&\quad= \operatorname{Res}_{\mathrm{i}a} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} + \operatorname{Res}_{-\mathrm{i}a} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \\
&\qquad\quad + \operatorname{Res}_{\mathrm{i}b} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} + \operatorname{Res}_{-\mathrm{i}b} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \\
&\quad= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}}{2\mathrm{i}a(-a^2+b^2)} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}}{2\mathrm{i}a(-a^2+b^2)} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}}{2\mathrm{i}b(a^2-b^2)} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt}}{2\mathrm{i}b(a^2-b^2)} \\
&\quad= \frac{\sin(at)}{a(b^2-a^2)} + \frac{\sin(bt)}{b(a^2-b^2)}.
\end{aligned}$$

Pokud platí $a = b$, máme

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\Big)(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\Big)(t) \\
&\quad= \operatorname{Res}_{\mathrm{i}a} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)^2} + \operatorname{Res}_{-\mathrm{i}a} \frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+a^2)^2} \\
&\quad= \Big(\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p+\mathrm{i}a)^2}\Big)'\Big|_{p=\mathrm{i}a} + \Big(\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p-\mathrm{i}a)^2}\Big)'\Big|_{p=-\mathrm{i}a} \\
&\quad= \frac{t\mathrm{e}^{pt}(p+\mathrm{i}a)^2 - 2\mathrm{e}^{pt}(p+\mathrm{i}a)}{(p+\mathrm{i}a)^4}\Big|_{p=\mathrm{i}a} + \frac{t\mathrm{e}^{pt}(p-\mathrm{i}a)^2 - 2\mathrm{e}^{pt}(p-\mathrm{i}a)}{(p-\mathrm{i}a)^4}\Big|_{p=-\mathrm{i}a} \\
&\quad= \frac{-4ta^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} - 4\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}}{16a^4} + \frac{-4ta^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} + 4\mathrm{i}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}}{16a^4} \\
&\quad= \frac{\sin(at) - at\cos(at)}{2a^3}.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že jsme nemuseli případ $a = b$ počítat znovu, ale že jsme mohli spočítat limitu pro b jdoucí k a v případě, kdy $a \neq b$. To plyne z toho, že při použití Věty o inverzi Laplaceovy transformace (Věta 22.3.4) je v daném případě příslušný integrál spojitou funkcí parametrů a a b díky Větě o spojitosti integrálu závislého na parametru (Věta 15.10.1).

Příklad 22.4.2. Nechť $a > 0$. Spočítejme $\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}})$, kde je druhá odmocnina komplexního čísla definována předpisem $\sqrt{p} := \varrho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}$ pro $p := \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$, $\varrho > 0$ a $s \in (-\pi, \pi)$ (vybrali jsme jednoznačnou holomorfní větev komplexní druhé odmocniny odpovídající logaritmu pracujícímu s hlavní hodnotou argumentu).

Nejprve si povšimněme, že pro $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$|\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}| = |\mathrm{e}^{-a|p|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}}| = \mathrm{e}^{-a|p|^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{s}{2})} \leq \mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}|p|^{\frac{1}{2}}}.$$

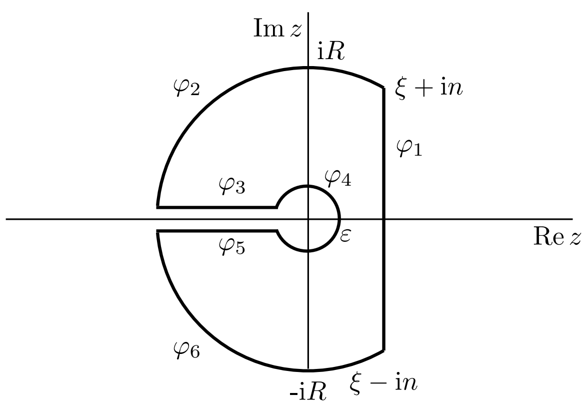
Díky tomu jsou splněny podmínky Věty o inverzi Laplaceovy transformace (Věta 22.3.4) a z ní dostáváme

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}})(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{n\to+\infty} \int_{\varphi_\xi|_{[-n,n]}} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p \qquad \text{pro všechna } t\in\mathbb{R} \text{ a } \xi>0,$$

kde křivka $\varphi_\xi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ je zadána předpisem

$$\varphi_\xi(s) = \xi + \mathrm{i}s \qquad \text{pro } s\in\mathbb{R}.$$

Zafixujme $t > 0$ a $\xi > 0$. Integrál popisující $\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}})(t)$ spočítáme pomocí Reziduové věty (Věta 20.8.17). Ke konstrukci uzavřené křivky budeme přistupovat podobně jako v důkazu Věty o vyjádření inverze reziduem (Věta 22.3.8), musíme si však dát pozor na zde používanou holomorfní větev komplexního logaritmu, která není definovaná na záporné reálné poloose. Kladně obíhanou křivku volíme jako na Obrázku 22.5.



Obrázek 22.5: Volba kladně obíhané křivky při výpočtu $\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{a\sqrt{p}})(t)$.

Díky druhé verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) celkově máme

$$\int_{\varphi_1\oplus\cdots\oplus\varphi_6} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p = 0.$$

Zabývejme se nyní integrály přes jednotlivé části zkonstruované křivky. Jednak platí

$$\int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p \overset{n\to+\infty}{\to} 2\pi\mathrm{i}\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}})(t).$$

Dále

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p\Big| &\le \int_{\arccos\frac{\xi}{R}}^{\pi} |\mathrm{e}^{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}t}||\mathrm{e}^{-aR^{\frac12}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}s}{2}}}|R\,\mathrm{d}s\\ &= \int_{\arccos\frac{\xi}{R}}^{\pi} \mathrm{e}^{Rt\cos s}\mathrm{e}^{-aR^{\frac12}\cos\frac{s}{2}}R\,\mathrm{d}s\\ &\le \int_{\arccos\frac{\xi}{R}}^{\frac34\pi} \mathrm{e}^{\xi t}\mathrm{e}^{-aR^{\frac12}\cos(\frac38\pi)}R\,\mathrm{d}s + \int_{\frac34\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{tR}{\sqrt2}}R\,\mathrm{d}s \overset{R\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$\int_{\varphi_6} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Navíc díky tomu, že $\mathrm{e}^z \to 1$ pro $z \to 0$, získáváme

$$\Big|\int_{\varphi_4} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p\Big| \le 2\pi\varepsilon C \overset{\varepsilon\to0_+}{\to} 0.$$

Zbývá se vypořádat s integrály přes křivky φ_3 a φ_5. Nejprve si povšimněme, že při zafixovaném $p_1 < 0$ máme pro $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$

$$\lim_{p_2\to0_+} \mathrm{e}^{-a\sqrt{p}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a|p_1|^{\frac12}}$$

a

$$\lim_{p_2\to0_-} \mathrm{e}^{-a\sqrt{p}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a|p_1|^{\frac12}}.$$

Odtud (pro korektní interpretaci a zdůvodnění následujícího limitního přechodu můžeme použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci, tedy Větu 15.8.21, a stejnoměrnost výše uvedených limit vůči $p_1 \in [-R,-\varepsilon]$; integrace per partes použitá níže se provede na omezeném intervalu a pak si dvakrát vypomůžeme Lebesgueovou větou o majorizované konvergenci)

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p + \int_{\varphi_5} \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p\\ &\overset{\varepsilon\to0_+,R\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ay^{\frac12}}\,\mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ay^{\frac12}}\,\mathrm{d}y\\ &= -2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yt}\sin(ay^{\frac12})\,\mathrm{d}y = -2i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t}\sin(au)2u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{2\mathrm{i}}{t}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-u^2t})'\sin(au)\,\mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{i}}{t}[\mathrm{e}^{-u^2t}\sin(au)]_0^{+\infty} - \frac{2a\mathrm{i}}{t}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t}\cos(au)\,\mathrm{d}u\\ &= 0 - \frac{2a\mathrm{i}}{t}\frac12\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-tz^2})(\tfrac{a}{2\pi}) = -\frac{a\mathrm{i}}{t}\mathrm{e}^{-\pi^2\frac{a^2}{4\pi^2t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.\end{aligned}$$

Celkově jsme proto dostali

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}})(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{a\mathrm{i}}{t}\mathrm{e}^{-\pi^2\frac{a^2}{4\pi^2t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{a}{2\pi^{\frac12}t^{\frac32}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}.$$