20.4.1 Aplikace Cauchyovy věty na výpočet integrálů

Zde si ukážeme dva příklady aplikace Cauchyovy věty. Jednak se budeme zabývat obtížným integrálem takového typu, jaké nám v další kapitole přichystá Fourierova transformace. Dále se budeme věnovat dvěma reálným integrálům. V obou případech půjde o situace, kdy integrand nemá primitivní funkci na třídě elementárních funkcí, tedy standardní početní technika Newtonova integrálu nelze použít.

Příklad 20.4.10 (Příklad související s Fourierovou transformací)**.** Zabývejme se integrálem

$$I(\lambda,\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. Integrand patří do $L^1(\mathbb{R})$ pro každé $\lambda > 0$ a $\xi \in \mathbb{R}$. Předně si povšimněme, že volba $\xi := 0$ dává

$$I(\lambda,0) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Dále platí $I(\lambda,\xi) = I(\lambda,-\xi)$ (stačí provést substituci $y = -x$). Proto budeme pracovat jen s $\xi > 0$.

Integrál si ještě přepišme do vhodnější podoby

$$I(\lambda,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2 - \frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2}\,\mathrm{d}x.$$

Počítáme proto integrál typu

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\mu > 0$ (v našem případě je $\mu := \pi\frac{\xi}{\lambda}$).

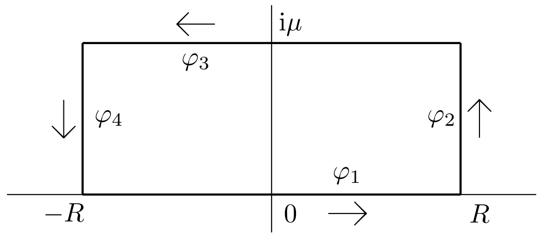
Pozor, formálně by se mohlo zdát, že integrál substitucí $x+\mathrm{i}\mu = y$ „převedeme“ na nám dobře známý případ integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda y^2}\,\mathrm{d}y$. To ale není možné. I když formálně v tomto případě by výsledek vyšel správně, později si ukážeme příklad, kdy by tato „substituce“ vedla ke špatnému výsledku. Uvědomme si, že takovou substituci nemůžeme provést, protože proměnná y by byla komplexní.

Na chvíli zafixujme $R > 0$. Cauchyovu větu použijeme na holomorfní funkci $f(z) = \mathrm{e}^{-\lambda z^2}$ a na křivku $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$, kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [-R,R]\\
\varphi_2(t) &= R + \mathrm{i}t && \text{pro } t \in [0,\mu]\\
\varphi_3(t) &= -t + \mathrm{i}\mu && \text{pro } t \in [-R,R]\\
\varphi_4(t) &= -R + \mathrm{i}(\mu - t) && \text{pro } t \in [0,\mu].
\end{aligned}$$

Zřejmě díky druhé verzi Cauchyovy věty (Věta 20.4.5) máme

$$\int_{\varphi} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$



Obrázek 20.9: Znázornění křivky z příkladu souvisejícího s Fourierovou transformací.

Nyní se budeme věnovat integrálům přes jednotlivé části křivky φ. Označme

$$J_2 := \int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Pak máme

$$\begin{aligned}|J_2| &\leq \sup_{\langle\varphi_2\rangle} |\mathrm{e}^{-\lambda z^2}| \ell_{\varphi_2} = \mu \max_{t\in[0,\mu]} |\mathrm{e}^{-\lambda(R+it)^2}| = \mu \max_{t\in[0,\mu]} |\mathrm{e}^{-\lambda(R^2-t^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda Rt}| \\ &= \mu \mathrm{e}^{-\lambda(R^2-\mu^2)} \overset{R\to+\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$J_4 := \int_{\varphi_4} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z \overset{R\to+\infty}{\to} 0.$$

Dále

$$J_1 := \int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

kde lze při limitním přechodu použít třeba Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Věta 15.8.19).

Pro zbývající integrál J_3 máme

$$J_3 = \int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to+\infty}{\to} -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}t = J.$$

Zde nám limitní přechod umožňuje Lebesgueova věta o majorizované konvergenci (Věta 15.8.21) a $L^1(\mathbb{R})$-majorantu nám dává odhad

$$|\mathrm{e}^{-\lambda(t+\mathrm{i}\mu)^2}| = |\mathrm{e}^{-\lambda(t^2-\mu^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\lambda t\mu}| = \mathrm{e}^{-\lambda(t^2-\mu^2)}.$$

Celkově jsme dostali

$$0 = \int_{\varphi} \mathrm{e}^{-\lambda z^2}\,\mathrm{d}z = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \overset{R\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + 0 - J + 0.$$

Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\mu)^2}\,\mathrm{d}x = J = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Odtud konečně dostáváme

$$I(\lambda,\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(x+\mathrm{i}\pi\frac{\xi}{\lambda})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\xi^2}{\lambda}} \quad \text{pro všechna } \lambda > 0 \text{ a } \xi \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 20.4.11. Speciální volba $\lambda = \pi$ v předchozím příkladu dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}.$$

Tento výsledek budeme v teorii Fourierovy transformace interpretovat tak, že funkce $\mathrm{e}^{-\pi x^2}$ se transformuje sama na sebe.

Příklad 20.4.12 (Fresnelovy integrály)**.** Spočítáme Fresnelovy integrály

$$(\mathcal{N})\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{N})\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Předně poznamenejme, že substituce $t = x^2$ dává

$$(\mathcal{N})\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Z tohoto zápisu je snadné ukázat, že uvedený integrál neexistuje jako Lebesgueův a existuje jako Newtonův (či zobecněný Lebesgueův). Podobně pro druhý integrál. Můžeme však psát (úplně napravo je Lebesgueův integrál)

$$(\mathcal{N})\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}(\mathcal{N})\int_0^{R} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Označme $I_R := \int_0^R \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. Podobně dostáváme

$$(\mathcal{N})\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} J_R,$$

kde $J_R := \int_0^R \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Cauchyovu větu budeme nyní aplikovat na holomorfní funkci $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ a křivku $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3$, kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t + \mathrm{i}0 && \text{pro } t \in [0,R]\\
\varphi_2(t) &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} && \text{pro } t \in [0,\tfrac{\pi}{4}]\\
\varphi_3(t) &= -t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} && \text{pro } t \in [-R,0].
\end{aligned}$$