KAPITOLA 1

ÚVOD DO METRICKÝCH PROSTORŮ

V této úvodní kapitole jsou uvedeny základní pojmy metrických prostorů a jejich vlastnosti spolu s příslušnými termíny a označeními, které pro tyto pojmy budeme dále používat (v různých publikacích a přednáškách se mohou termíny i označení lišit). Důkazy u jednoduchých souvislostí nebo jednoduchých přímých postupů buď nejsou uvedeny nebo jsou tu jen v krátké nápovědě.

1.1 METRICKÝ PROSTOR

V historických poznámkách na konci této kapitoly je zmíněno, že Fréchet definoval více pojmů vhodných pro vzdálenost nebo konvergenci. Nejvíce se ujal následující pojem, kterému dal Hausdoff název metrické prostory (v originále *metrische Räume*). Tyto struktury jsou definovány pomocí přirozených vlastností vzdáleností známých z euklidovských prostorů.

Definice 1.1.1 Metrický prostor

Nechť X je množina a d je funkce přiřazující každé dvojici (x, y) z X nezáporné reálné číslo $d(x, y)$ mající vlastnosti:

1. pro $x, y \in X$ je $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé $x, y \in X$ (symetrie);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $x, y, z \in X$ (trojúhelníková nerovnost).

Funkce d se pak nazývá *metrika* na X a dvojice (X, d) se nazývá *metrický prostor*. Pokud se první vlastnost nepožaduje jako ekvivalence, ale jen jako implikace $(x = y) \Rightarrow (d(x, y) = 0)$, nazývá se d *pseudometrika* a (X, d) *pseudometrický prostor*.

Nevylučujeme možnost $X = \emptyset$. Základním příkladem jsou euklidovské prostory $\mathbb{R}^n$ s obvyklou vzdáleností

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}\,.$$

Na konci této části jsou uvedeny další příklady (některé z nich použijeme už nyní).

Přirozeným způsobem se definuje *vzdálenost bodu nebo množiny od množiny* a *průměr* množiny. Pro metrický prostor (X, d) a $x \in X, A, B \subset X$ definujeme (index d v definici průměru se často vynechává):

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b); b \in B\}\,, \quad d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}\,,$$

$$\operatorname{diam}_d A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}\,.$$

Je vhodné připomenout, že inf a sup se chápou na množině $[0, +\infty)$, tedy $\sup \emptyset = 0$, $\inf \emptyset = +\infty$ a dostáváme $d(x, \emptyset) = d(A, \emptyset) = +\infty$, $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

Zadefinujeme nyní několik užitečných pojmů pro metrický prostor. Bude-li zřejmé, o jakou metriku na množině X se jedná, budeme uvádět místo (X, d) často jen X.

Definice 1.1.2 Konvergence, otevřené a uzavřené množiny, uzávěr

Nechť (X, d) je metrický prostor a $A \subset X$.

1. Posloupnost $\{x_n\}$ v X *konverguje* k bodu $x \in X$ (nebo má za *limitu* bod $x \in X$), jestliže $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Značení: $x_n \to x$ nebo $\lim x_n = x$.

2. Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže žádná posloupnost z $X \setminus A$ nekonverguje v X k bodu z A.

3. Množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže limity posloupností z A leží v A.

4. *Uzávěr* množiny A je množina všech limitních bodů posloupností z A. Uzávěr množiny A se většinou značí $\overline{A}$.

Pro $X = \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly otevřenými množinami. Intervaly jsou uzavřenými množinami právě když mají jeden ze tvarů $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Otevřené množiny v $\mathbb{R}$ jsou právě disjunktní sjednocení otevřených intervalů. Uzavřené množiny v $\mathbb{R}$ mají složitější tvary. V rovině je každý graf spojité funkce na uzavřeném intervalu uzavřenou množinou. Je snadno vidět, že $\overline{A} = \{x \in X; d(x, A) = 0\}$.

Může se stát, že dvě různé metriky určují totožné konvergence (např. na $\mathbb{R}$ obvyklá metrika $|x - y|$ a metriky $2|x - y|$, $\min\{|x - y|, 1\}$, $|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$). Pokud je v nějaké situaci potřebná konvergence získaná z metriky a nikoli hodnoty té metriky, lze použít vhodnější metriku, která má stejnou konvergenci.

Definice 1.1.3 Ekvivalentní metriky

Dvě metriky d, e na množině X se nazývají *ekvivalentní*, jestliže metrické prostory (X, d) a (X, e) mají totožné konvergentní posloupnosti. Pojmy a vlastnosti, které se nezmění záměnou metrik za ekvivalentní, se nazývají *topologické*.

Prostory s ekvivalentními metrikami mají tedy stejné otevřené množiny, stejné uzavřené množiny, stejné uzávěry množin, protože tyto pojmy jsou definovány pomocí konvergence.

Mohli jsme místo konvergence zadefinovat jako primární pojem otevřené množiny a z něj definovat konvergenci. Podobně s ostatními pojmy. Následující tabulka ukazuje příslušné vztahy. V řádku je tučně vytištěn základní pojem a charakterizace ostatních pojmů podle tohoto základního pojmu. Pro jednoduchost bude G značit libovolnou otevřenou množinu, F libovolnou uzavřenou množinu a A libovolnou podmnožinu, vše v (X, d). Zkratka s.v. značí skoro všechna, tj. až na konečně mnoho.

Konvergence $x_n \to x$	Otevřené množiny	Uzavřené množiny	Uzávěr
Konvergence	$\{x_n\} \cap G = \emptyset \Rightarrow \lim x_n \notin G$	$\{x_n\} \subset F \Rightarrow \lim x_n \in F$	$\bar{A} = \{x; \exists \{x_n\} \subset A, \lim x_n = x\}$
$x \in G \Rightarrow$ s.v. $x_n \in G$	**Otevřené množiny**	$F = X \setminus G$	$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x \in G \Rightarrow G \cap A \neq \emptyset$
$x \notin F \Rightarrow$ s.v. $x_n \notin F$	$G = X \setminus F$	**Uzavřené množiny**	$\bar{A} = \bigcap \{F; F \supset A\}$
$\{x\} = \bigcap_{k_n} \bigcap_n \overline{\{x_{k_n}\}}$	$A \cap G = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap G = \emptyset$	$F = \overline{F}$	**Uzávěr**

V posledním řádku a prvním sloupci by měl být přesnější (ale příliš dlouhý) zápis $\{x\} = \bigcap \{\overline{\{x_i; i \in A\}}; A \subset \mathbb{N}, A \text{ nekonečná}\}$. Důkazy uvedených souvislostí jsou velmi jednoduché a přímé (plynou z popisu uvedených pojmů). Pro začátečníky je vhodné si tyto důkazy provést, protože tím získají vhodné myšlenkové pochody a uvědomí si různé vztahy.

Analogicky situaci v euklidovských prostorech lze definovat další topologický pojem, a to okolí bodu v prostoru (X, d). Základním pojmem je koule v (X, d) se středem v bodě $x \in X$ a poloměru $r > 0$, tj. množina $B_r(x) = \{y; d(x, y) < r\}$. Uzavřenou koulí rozumíme množinu $\widetilde{B}_r(x) = \{y; d(x, y) \leq r\}$. Koule jsou otevřené množiny, uzavřené koule jsou uzavřené množiny. Ale pozor, na rozdíl od euklidovských prostorů nemusí být uzavřená koule $\widetilde{B}_r(x)$ uzávěrem otevřené koule $B_r(x)$.

Definice 1.1.4 Okolí bodu

Okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je každá podmnožina v X obsahující některou kouli $B_r(x)$.

Jinými slovy, soustava otevřených koulí se středem v x je tzv. bází okolí bodu x, tj., každé okolí obsahuje prvek báze. Navíc lze za bázi vzít jen spočetně mnoho koulí $\{B_{r_n}(x)\}$, kde $r_n \to 0$ (často se bere $r_n = 1/n$ nebo $r_n = 2^{-n}$). Ve Cvičení 1.1.4 na konci této části je možné si ověřit, že okolí bodu x lze definovat pomocí ostatních výše uvedených topologických pojmů a obráceně, dříve uvedené pojmy lze popsat pomocí okolí. Např. množina je otevřená právě když je okolím každého svého bodu.

Lze definovat i okolí množiny: množina $U \subset X$ je okolím množiny A v X, jestliže je okolím každého bodu z A, tj. pro každé $a \in A$ existuje r takové, že $B_r(a) \subset U$. Nemusí ale existovat r stejné pro všechny prvky $a \in A$ (např. vezmeme za A kladnou osu x v $\mathbb{R}^2$ a $U = \{(x, y); |y| < 1/x\}$). Pokud by takové stejné r existovalo, dostaneme tzv. stejnoměrné okolí množiny A, které značíme $B_r(A)$. Zatímco okolí množiny je topologický pojem, stejnoměrné okolí není topologický pojem.

Definice 1.1.5 Množina hustá, řídká, 1., 2. kategorie, separabilní

Nechť X je metrický prostor.

1. Podmnožina v X se nazývá *hustá*, jestliže její uzávěr je celý prostor X.

2. Podmnožina v X se nazývá *řídká*, jestliže doplněk jejího uzávěru je hustý.

3. Podmnožina v X se nazývá *1. kategorie*, jestliže je sjednocením spočetně mnoha řídkých množin. ,

4. Podmnožina v X se nazývá *2. kategorie*, není-li 1. kategorie.

5. Metrický prostor se nazývá *separabilní*, jestliže má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.