**Věta 1.5.7 Vlastnosti totálně omezených prostorů**

1. *Kompaktní prostor je totálně omezený*

2. *Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.*

3. *Uzávěr totálně omezeného prostoru ve větším prostoru je totálně omezený.*

4. *Součin nejvýše spočetně mnoha totálně omezených prostorů je totálně omezený.*

5. *Stejnoměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.*

***Důkaz.*** Vlastnosti 1,2 a 5 plynou např. z předchozí Věty 1.5.6.5. Podobně i vlastnost 4, protože součin kompaktních prostorů je kompaktní (Věta 1.5.1.4). Pro důkaz vlastnosti 3 si stačí uvědomit, že pokud má prostor nekonečnou $r$-síť, má každá jeho hustá část nekonečnou $r/2$-síť. Nyní stačí použít Větu 1.5.6.2. ◻

*CVIČENÍ*

**1.** Kompaktnost a totální omezenost lze definovat stejně i pro pseudometrické prostory. Platí, že pseudometrický prostor je kompaktní (nebo totálně omezený), právě když jeho metrická modifikace má stejnou vlastnost.

**2.** Každá spojitá bijekce na kompaktním prostoru je homeomorfismus.

**3.** Najděte příklad spojitého obrazu totálně omezené množiny který není totálně omezený.

**4.** Dokažte, že metrický prostor $X$ je separabilní právě když lze z každého otevřeného pokrytí prostoru $X$ vybrat spočetné pokrytí. [Návod: Pro jednu implikaci se použije Věta 1.1.5.2 o spočetné bázi, pro opačnou implikaci se použije důkaz sporem a sestrojí se nespočetná $r$-síť.]

**5.** Součin $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (tzv. Tichonovův kvádr) je kompaktní.

**6.** Součin $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,\frac{1}{n}]$ (tzv. Hilbertův kvádr) je kompaktní podmnožina $\ell_2$. Tichonovův a Hilbertův kvádr jsou homeomorfní (nikoli isometrické).

**7.** Cantorova množina je kompaktní.

**8.*** Prostor neprázdných uzavřených podmnožin kompaktního prostoru s Hausdorffovou metrikou je kompaktní. Pro podrobnosti viz Větu 5.4.1 a po ní následující odstavec v Kapitole 5.

**9.** Metrický prostor $X$ je separabilní právě když lze vnořit do Tichonovova (nebo Hilbertova) kvádru. [Návod: pro každý bod $p$ husté spočetné podmnožiny prostoru $X$ a každé $n\in\mathbb{N}$ existuje spojité zobrazení $X\to[0,1]$, které se rovná 0 na $B_{1/(n+1)}(p)$ a 1 na $X\setminus B_{1/n}(p)$ – např. $k\,d(x,B_{1/(n+1)}(p))$ pro vhodné $k$; diagonální součin těchto zobrazení je hledané vnoření.]

Důsledkem jsou následující dvě tvrzení:

(i) Metrický prostor $X$ je separabilní právě když má ekvivalentní totálně omezenou metriku.

(ii) Metrický prostor $X$ je kompaktní právě když je homeomorfní uzavřenému podprostoru Tichonovova (nebo Hilbertova) kvádru.

**10.** Metrický prostor má spočetnou bázi složenou z obojetných množin právě když lze vnořit do Cantorova prostoru. [Návod je podobný jako u předchozí úlohy, jen se berou zobrazení do dvoubodového prostoru $\{0, 1\}$ a využije se toho, že Cantorův prostor je homeomorpfní součinu $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ – viz Cvičení 1.3.18.]

**11.** Nechť $A_1, ..., A_n$ jsou disjunktní kompaktní množiny v prostoru $X$ a $f : X \to Y$ je surjekce, která je na každé množině $A_i$ konstantní s hodnotou $x_i$, jinak je prostá. Pak kvocient $X$ podle zobrazení $f$ je metrický. Pokud je $X$ úplný, je i $Y$ úplný.

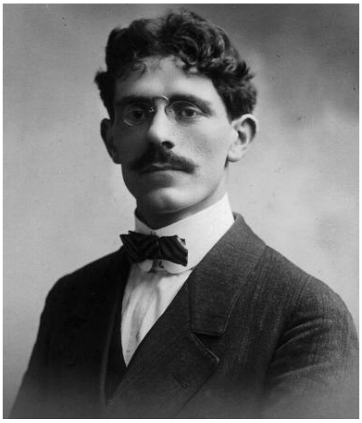
**12.** Nechť $X$ je kompaktní prostor a $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spojité funkce na $X$. Pak posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k $f$ právě když pro každou konvergentní posloupnost $x_n \to x$ in $X$ platí $f_n(x_n) \to f(x)$. Najděte příklad, že kompaktnost nelze vynechat.

**13.** (U. Dini, 1878) Je-li $\{f_n\}$ monotonní posloupnost spojitých reálných funkcí na kompaktním prostoru, která konverguje bodově ke spojité funkci, tak konverguje stejnoměrně.

## 1.6 POZNÁMKY

### *TROCHA HISTORIE*

Na obrázcích jsou dva matematici, kteří zásadně ovlivnili vznik a vývoj metrických prostorů.



Maurice Fréchet (1878–1973)

Felix Hausdorff (1868–1942)

Ke konci 19.století se v publikacích často vyskytovaly navzájem podobné důkazy a konstrukce, hlavně v prostorech funkcí a v euklidovských prostorech. Známý francouzský matematik Jacques Hadamard (1865–1963) podnítil svého mladého kolegu Frécheta k abstraktnímu pohledu na uvedené souvislosti. Fréchet uvedl některé své výsledky v r. 1904 a vše ve své 70-ti stránkové dizertaci *Sur quelques points du calcul fonctionnel* v r. 1906. Jak je vidět z názvu, hlavním tématem byla funkcionální analýza, ale základem byly vhodné abstraktní struktury, jejichž vlastnosti a výsledky se pak použily na známé prostory funkcí.

Fréchet definoval několik abstraktních struktur, byly to prostory typu (L), (V) a (E). Prostory typu (L) (podle slova *limit*) se nyní nazývají konvergenční prostory a jejich základním kamenem jsou soustavy dvojic $(S, x)$ posloupností a bodů v dané množině, které splňují přirozené axiomy konvergence $S$ k $x$. Prostory typu (E) (podle francouzského slova *écart*, vzdálenost) jsou dnešní metrické prostory. Prostory posledního typu (V) (*voisinage*, okolí) byly definovány podobně jako (E), ale měly zobecněnou trojúhelníkovou nerovnost. Později (1917) dokázal americký matematik E. W. Chittenden, že prostory typu (V) a (E) jsou v jistém smyslu ekvivalentní. Fréchet pro své struktury definoval mnoho základních pojmů a odvodil jejich vlastnosti, např. kompaktnost, separabilita, úplnost.

Fréchet nepoužil nejvhodnější termíny pro tyto pojmy. Navíc nebylo jednoduché se v jeho práci orientovat. V r. 1914 publikoval F. Hausdorff knihu Grundzüge der Mengenlehre (476 str.). V ní použil pro prostory typu (E) termín metrické prostory a systematicky vyložil jejich základní vlastnosti spolu s termíny, které se používají dodnes. Tato kniha se uvádí i jako základní kámen topologických prostorů a některých částí funkcionální analýzy a teorie množin.

Zmíníme se i o jiných aktivitách obou zmíněných velkých matematiků. Fréchet se zhruba ve 30. letech minulého století přeorientoval na aktuárské vědy, aplikace pravděpodobnosti a statistiky do pojišťovnictví. U Hausdorffa to bylo naopak, metrickým a podobným prostorům se věnoval až ve starším věku. V dřívějších letech měl mnoho různých zájmů, např. fyziku, astronomii, jiné oblasti matematiky, ale psal i divadelní hry, romány, filosofická pojednání.

### *DALŠÍ POJMY*

Metrika nemusí mít v aplikacích vždy význam vzdálenosti, ale např. čas. Při měření času proběhnutých jevů může nastat situace, že příslušná funkce není symetrická, v některých případech nemusí platit trojúhelníková nerovnost. Existují modifikace axiomů metriky, které zachycují podobné situace. Základem pro tyto modifikace je ale teorie metrických prostorů.

Stejným nebo podobným způsobem jako v reálných číslech lze v metrických prostorech definovat další pojmy, např. vnitřek množiny, hranici množiny.

*Vnitřek* množiny $A$ je největší otevřenou množina obsažená v $A$. Často se značí $\operatorname{int} A$ a je to sjednocení všech otevřených koulí obsažených v $A$. Vnitřek množiny lze popsat jako $X \setminus \overline{X \setminus A}$.

*Hranice* množiny $A$ je $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Je to množina bodů $x$ majících vlastnost, že každá otevřená koule se středem v $x$ protíná jak $A$ tak $X \setminus A$. Uzávěr množiny je sjednocení této množiny a její hranice.

Je-li $X$ komutativní grupa (operace sčítání), $d$ je metrika na $X$ a pro všechna $x, y, z \in X$ platí $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, nazývá se $d$ *invariantní* vzhledem ke sčítání. V příkladech metrických prostorů je to v případech, kdy se vzdálenost $x$ od $y$ definuje pomocí $x-y$. Pak je $d(x, y) = d(x-y, 0)$ a metrika $d$ je určena funkcí jedné proměnné $z \rightsquigarrow d(z, 0)$, která se často označuje jako $|z|$ nebo $||z||$ (potom $d(x, y) = |x - y|$). Axiomy pro metrický prostor mají v tomto případě tvar