4.3 MODIFIKACE BANACHOVY VĚTY

Základní tvrzení mívají většinou různé modifikace použitelné v různých situacích. Uvedeme několik z nich pro Banachovu větu. Zajímavé modifikace Brouwerovy věty používají většinou obecnější Borsukovu-Ulamovu větu a vrátíme se k nim v poslední kapitole.

Následující tvrzení je jednoduchý důsledek Banachovy věty (předpoklad spojitosti je nutný).

Věta 4.3.1 Banachova věta pro antikontrakce

Nechť X je úplný prostor a pro $f : X \to X$ platí $d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y)$ pro nějaké $k > 1$ a všechna $x, y \in X$. Je-li f spojitá, má jediný pevný bod.

Důkaz. Zobrazení f je prosté a $g = f^{-1} : f(X) \to X$ je kontrakce. Pokud je $f(X)$ uzavřený podprostor X (a tedy úplný), existuje podle Banachovy věty jediný bod $x \in f(X)$ takový, že $g(x) = x$ a tedy $f(x) = x$. Zbývá dokázat, že $f(X)$ je uzavřený v X. Vezmeme $y \in \overline{f(X)}$ a posloupnost $\{y_n\}$ v $f(X)$ konvergující k y. Protože je g stejnoměrně spojité zobrazení, je posloupnost $\{g(y_n)\}$ cauchyovská a konverguje tedy k nějakému bodu $x \in X$. Ze spojitosti f plyne $f(g(y_n)) \to f(x)$, tj. $y_n \to f(x)$ a tedy $y = f(x) \in f(X)$. □

Často se v aplikacích používá modifikace Banachovy věty, kde se předpokládá, že některá z iterací f^n funkce f je kontrakce. To je výhodné např. při řešení diferenciálních nebo integrálních rovnic (např. Volterrovy integrální rovnice - viz Cvičení 4.4.1). Nejdříve obecnější tvrzení.

Věta 4.3.2 Pevný bod iterací

Nechť X je úplný prostor, $f : X \to X$ a f^n má jediný pevný bod pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak f má jediný pevný bod.

Důkaz. Předpokládáme $n > 1$. Podle předpokladu existuje jediné x_0, že $f^n(x_0) = x_0$. Pak $f(x_0) = f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0) = f^n(f(x_0))$, což znamená, že $f(x_0)$ je pevný bod zobrazení f^n. Ten má ale jediný pevný bod, a to x_0. Musí tedy být $f(x_0) = x_0$. □

Důsledek 4.3.3 Banachova věta pro iterace

Nechť $f : X \to X$, kde X je úplný prostor a existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že f^n je kontrakce. Pak f má jediný pevný bod.

Často se vyskytují situace, kdy hledáme pevný bod zobrazení $f : X \to Y$, kde množina Y není částí X. Samozřejmě musí množinu X protínat a f musí na průniku splňovat nějaké podmínky. Uvedeme jedno takové tvrzení a jeho zajímavý důsledek.

Věta 4.3.4 Banachova věta pro kontrakce zachovávající sféru

Nechť B je uzavřená koule v Banachově prostoru X a $f : B \to X$ je kontrakce, která zobrazuje hranici S koule B do B. Pak f má jediný pevný bod.

Důkaz. Nechť f má konstantu kontrakce rovnou $k < 1$. Můžeme předpokládat, že B má poloměr r a střed v 0. Funkce $g(x) = \big(f(x)+x\big)/2$ zobrazuje $B \to B$. Opravdu, je-li, pro $x \in B \setminus \{0\}$, $c(x)$ průsečík polopřímky z 0 do x se sférou S a $c(0)$ libovolný bod S, pak $\|x - c(x)\| \leq r$ a $\|f(x) - f(c(x))\| \leq k\|x - c(x)\| < \|x - c(x)\|$. Protože $\|f(c(x))\| \leq r$, máme $\|f(x)+x\|/2 \leq (\|f(c(x))\|+k\|x-c(x)\|+\|x\|)/2 \leq (r+r)/2$ a tedy $\|g(x)\| \leq r$. Zobrazení g je kontrakce, protože

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| = \frac{1}{2}\,\|(x + f(x)) - (y + f(y))\| &\leq \frac{1}{2}\,\|x - y\| + \frac{1}{2}\,\|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x - y\| + k\|x - y\|\right).\end{aligned}$$

Existuje tedy $x \in B$ s vlastností $g(x) = x$, odkud vyplývá, že $f(x) = x$. □

Důsledek 4.3.5 Banachova věta pro funkce liché na sféře

Nechť B je uzavřená koule se středem 0 a s hranicí S v Banachově prostoru X a $f : B \to X$ je kontrakce, která je lichá na S. Pak f má jediný pevný bod.

Následuje zajímavá modifikace Banachovy věty s použitím tzv. regresní funkce.

Věta 4.3.6 Banachova věta s regresní funkcí

Nechť X je úplný prostor a $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ je neklesající a spojitá funkce splňující $0 < h(t) < t$ pro $t > 0$. Každé zobrazení $f : X \to X$ s vlastností $d(f(x), f(y)) \leq h(d(x, y))$ má pevný bod.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že pro $t > 0$ konverguje posloupnost $\{h^n(t)\}$ k 0. Je zřejmé, že tato posloupnost je klesající, takže má limitu, řekněme s. Pokud je $s > 0$, musí být $h(s) < s$, ale $h(s)$ je limitou posloupnosti $\{h^{n+1}(t)\}$, která ovšem má limitu také s. Takže $s = 0$. Postupujeme podobně jako v důkazu Banachovy věty o pevném bodě. Vezmeme opět nějaké $x_0 \in X$ a $x_{n+1} = f(x_n)$. Dostaneme $d(x_{n+1}, x_n) \leq h^n(d(x_1, x_0))$, což znamená, že $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$. Stačí nyní ukázat, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská. Pro každé $r > 0$ platí, že když $d(f(x), x) < r - h(r)$, je $f(B_r(x)) \subset B_r(x)$. Opravdu, pro libovolné $y \in B_r(x)$ platí $d(f(y), x) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), x) \leq h(d(x, y)) + r - h(r) < r$. Vezmeme n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d(x_{n+1}, x_n) < r - h(r)$. Potom $x_{n+1} \in B_r(x_{n_0})$ a indukcí $x_m \in B_r(x_{n_0})$ pro každé $m \geq n_0$, což dává cauchyovskost $\{x_n\}$. □

Nechť $\varepsilon > 0$. Říkáme, že (X, d) je ε-řetězitelný (ε-chainable), jestliže pro každé dva body $x, y \in X$ existuje konečná posloupnost v X, např. $\{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pro $i = 0, ..., n-1$. Zobrazení $f : (X, d) \to (X, d)$ se nazývá kontrakce pro vzdálenosti menší než ε, jestliže existuje $k < 1$, že $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ jakmile $d(x, y) < \varepsilon$.

Věta 4.3.7 Banachova věta pro řetězitelné prostory

Pokud je prostor X ε-řetězitelný a úplný, má každá kontrakce pro vzdálenosti menší než ε pevný bod.

Důkaz. Vezmeme-libovolný bod $x_0 \in X$ a ε řetízek $x_0, x_+, ..., x_n = f(x_0)$, Nechť $k < 1$ je konstanta kontrakce pro f. Pak $d(x_0, f(x_0)) \leq n\varepsilon$ a $d(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) \leq k^m n\varepsilon$. Podobně jako v důkazu Banachovy věty odtud vyplývá, že posloupnost $\{f^n(x_0))\}$ je cauchyovská a konverguje nějakému bodu x. Bod x je pevným bodem zobrazení f.

Důkaz jednoznačnosti je tu trochu jiný. Jestliže $f(x) = x, f(y) = y$ a mezi x, y existuje ε-řetízek délky p, pak $d(x,y) \leq p\,\varepsilon, d(x,y) = d(f^n(x), f^n(y)) \leq k^n p\,\varepsilon$. Protože $k^n \to 0$, je $x = y$. □

4.4 CVIČENÍ

1. Volterrova integrální rovnice je tvaru $y(x) = y_0(x) + \int_a^s K(x,s)y(s)\,\mathrm{ds}$, kde y_0 je spojitá funkce na $[a,b], K$ je spojitá funkce na $[a,b] \times [a,b]$ a y je hledaná funkce. Hledáme tedy pevný bod zobrazení f na prostoru $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$, kde $f(y)(x) = y_0(x) + \int_a^s K(x,s)y(s)\,\mathrm{ds}$. Ukažte, že existuje n takové, že f^n je kontrakce. [Dokažte indukcí, že $\|f^n(y_1) - f^n(y_2)\| \leq \frac{(\max|K(x,s)|)^n}{n!}\|y_1 - y_2\|$.]

2. Pokud $f : X \to X$ splňuje $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ a $f(X)$ je kompaktní, má f jediný pevný bod. [Sporem pro $\min\{d(f(x), x)\} > 0$.]

3. Spojitá funkce $x + 1/x : [1,\infty) \to [1,\infty)$ splňuje $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, ale nemá pevný bod.

4. Je-li (X,d) kompaktní prostor, $f : X \to X$ spojité zobrazení a pro každé $r > 0$ existuje $x_r \in X$ tak, že $d(f(x_r), x_r) < r$ potom f má pevný bod.

5. Hilbertův kvádr $\{\{x_n\}; |x_n| \leq 1/n\} \subset \ell_2$ má vlastnost pevného bodu. [Použije se předchozí výsledek a vhodná modifikace funkce f na konečně dimenzionálních podprostorech.]

6. Tichonovův kvádr $[0,1]^{\mathbb{N}}$ má vlastnost pevného bodu. [Použije se předchozí výsledek.]

7. Bolzanova věta o nulových bodech říká, že má-li spojitá funkce rozdílná znaménka v koncových bodech kompaktního intervalu, nabývá hodnoty 0 v nějakém bodě uvnitř intervalu. Použitím této věty ukažte, že každá spojitá funkce $f : [a,b] \to [a,b]$ má pevný bod (Pozorování 4.1.2). [Zkoumejte $f(x) - x$.]

8. Z vlastnosti, že každá spojitá funkce $f : [a,b] \to [a,b]$ má pevný bod, odvoďte Bolzanovu větu. [Je-li to nutné, lze vhodně rozšířit funkci f na $[c,d] \supset [a,b]$, aby $(f(x) + x)([c,d]) \subset [c,d]$.]

9. Dokažte, že funkce f z důkazu Tvrzení 4.2.2 je spojitá.

10. Dokažte, že v trojúhelníku o průměru 1 má jeho n-té barycentrické zjemnění průměry svých simplexů nejvýše $(2/3)^n$.

11. Ukažte, že každý souvislý prostor je ε-řetězitelný pro každé $\varepsilon > 0$ (prostor X je souvislý, jestliže jediné obojetné množiny v X jsou $\emptyset, X$).

Najděte příklad nuldimenzionálního prostoru, který je ε-řetězitelný pro každé $\varepsilon > 0$.

Najděte příklad úplného nesouvislého prostoru, který je ε-řetězitelný pro každé $\varepsilon > 0$.