

## 6 Anomální difúze

Mikroskopické parametry náhodné procházky jako délka kroku, doba jednoho kroku či přesné statistické charakteristiky náhodné síly  $\xi(t)$  pohánějící Brownův pohyb nebývají experimentálně přístupné. Měříme jen makroskopické veličiny, například difúzní konstantu. Zajímavou otázkou zůstává, nakolik je volba detailů modelu podstatná. Připusťme délku kroku jako náhodnou veličinu. Zachová či pozmění se makroskopický obraz Brownova pohybu? Centrální limitní věta zaručuje gaussovské limitní chování (95) v  $t \rightarrow \infty$  pro širokou třídu distribucí délky kroku. Podstatnými předpoklady jsou pouze konečná střední hodnota a konečná variance rozdělení. Dříve, než prozkoumáme důsledky nekonečných variancí pro difúzní rovnici, zobecníme centrální limitní větu.

### 6.1 Lévyho stabilní distribuce

Pokud je variance rozdělení náhodné veličiny nekonečná, např. pro distribuce s algebraickou asymptotikou hustot  $\sim 1/x^{1+\mu}$ ,  $\mu \in (0, 2)$ , neplatí centrální limitní věta. Ve skutečnosti snadno ověříme, že autokonvoluce  $[f * f](x) \equiv \int f(x-y)f(y)dy$  hustot Cauchyho rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\pi c \left(1 + \frac{(x-\Delta)^2}{c^2}\right)} \quad (146)$$

zachová tvar (146), pozmění pouze parametry  $\Delta, c$ . Podobně se v celém uvažovaném intervalu hodnot exponentu  $\mu \in (0, 2)$  při autokonvolucích udrží<sup>28</sup> algebraická asymptotika  $1/x^{\mu+1} * 1/x^{\mu+1} \propto 1/x^{\mu+1}$ .

Hledejme tedy limitní rozdělení pro autokonvoluce  $p_N$  hustot  $p(x)$

$$p_N(x) = \underbrace{p(x) * p(x) * \dots * p(x)}_N. \quad (147)$$

Hustoty limitního rozdělení  $p_N \rightarrow f$  jsou zřejmě *stabilní* [39]

$$A_N f_N(A_N x + B_N) = f(x), \quad (148)$$

<sup>28</sup>Stabilita Cauchyho rozdělení k autokonvolucím odpovídá stabilitě exponenciály v jeho Fourierově obrazu  $F(k) = e^{ikx - |k|x}$  vůči multiplikacím. Pro obecnější případ je třeba nastudovat heslo „Tauberian theorems“ v [38], pokud tedy ještě nevíte, že mocninná asymptotika hustot (155) má obraz v limitním  $k \rightarrow 0$  chování obrazu  $F(k) \sim 1 - k^\mu$ .

tj. nemění při autokonvoluci svůj tvar a pouze škálují své rozměry, podobně jako Gaussova či Cauchyho distribuce. Konvoluční rovnici (148) vyřešíme ve Fourierově obraze  $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx$

$$e^{-ikNB_N/A_N} F^N(k/A_N) = F(k). \quad (149)$$

Prefaktor  $e^{-ikNB_N/A_N}$  vlevo se zbavíme volbou  $B_N = \Delta(1 - A_N/N)$ . Substituce  $F(k) = e^{ik\Delta+g(k)}$  pak převádí (149) na funkcionální rovnici

$$Ng(k/A_N) = g(k). \quad (150)$$

Ihned vidíme, že  $g(0) = 0$  a lineární člen  $\ln F(k) \sim ik\Delta$  byl již předem vydělen. Algebraický útlum  $f(x) \propto 1/|x|^{1+\mu}$  v  $x \rightarrow \pm\infty$  vymezíme limitním chováním  $g(k) \propto |k|^\mu$  v  $k = 0$ . Ještě uvážíme, že  $g(k) = g^*(-k)$  (neb  $f$  je reálná). Řešení (150) můžeme vymezit tříparametrickou funkcí

$$\begin{aligned} g(k; \mu, \beta, c) &= -c|k|^\mu [1 - i\beta \operatorname{sgn}(k) \tan(\pi\mu/2)], & \mu \neq 1, \\ g(k; \mu, \beta, c) &= -c[|k| + 2i\pi^{-1}\beta k \ln |k|], & \mu = 1. \end{aligned} \quad (151)$$

Zpětnou Fourierovou transformací získáme z (151) hustotu pravděpodobnosti pro *Lévyho stabilní distribuce* (LSD), limitní rozdělení pro sumaci nezávislých náhodných veličin s divergující variancí

$$f(x; \mu, \beta, c, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[-ik(x - \Delta) + g(k; \mu, \beta, c)]. \quad (152)$$

Hustoty (152) při autokonvolucích (147) splňují

$$f_N(x; \mu, \beta, c, \Delta) = f(x; \mu, \beta, Nc, N\Delta) \quad (153)$$

a nepřehlédneme ani škálování

$$f(x; \mu, \beta, c, \Delta) = \lambda^{-1/\mu} f(x/\lambda^{1/\mu}; \mu, \beta, c/\lambda, \Delta/\lambda^{1/\mu}). \quad (154)$$

Hustota Gaussova rozdělení (95) odpovídá  $\mu = 2, \beta = 0, c = Dt, \Delta = x'$ , všechna stabilní rozdělení tak máme zahrnuty v (152).

Asymptotika LSD vyplyne<sup>28</sup> z limitního chování  $F(k)$  v  $k = 0$

$$f(x \rightarrow \pm\infty) \sim \frac{\mu c (1 \pm \beta) \Gamma(\mu) \sin(\pi\mu/2)}{\pi |x|^{\mu+1}}. \quad (155)$$

a dává výborný základ pro diskuzi o významu parametrů LSD.

Parametr *exponent*  $\mu \in (0, 2)$  určuje mocninu asymptotického útlumu na kladné  $f(x) \propto 1/x^{1+\mu}$  i na záporné  $f(x) \propto 1/(-x)^{1+\mu}$  poloose.<sup>29</sup> *Asymetrie* (též *šikmost*)  $\beta \in [-1, 1]$  vyjadřuje asymptotický poměr hustot na kladné a záporné poloose

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(-x)}.$$

Hodnota  $\beta = 0$  indikuje symetrii kolem  $x = \Delta$

$$f(\Delta - x; \mu, 0, c, \Delta) = f(x + \Delta; \mu, 0, c, \Delta).$$

*Posun*  $\Delta \in (-\infty, \infty)$  je analogií vrcholu Gaussovy distribuce (a vyjadřuje střed symetrických  $\beta = 0$  rozdělení)

$$f(x; \mu, \beta, c, \Delta) = f(x - \Delta; \mu, \beta, c, 0).$$

*Škála*  $c \in (0, \infty)$  je parametr analogický varianci  $c \sim Dt \sim \langle x_W^2 \rangle / 2$  Gaussova rozdělení (95), který určuje roztažení podél  $x$

$$f(x; \mu, \beta, c, \Delta) = c^{-1/\mu} f(x/c^{1/\mu}; \mu, \beta, 1, \Delta/c^{1/\mu}). \quad (156)$$

Při čtení literatury je zde třeba ostražitosti, zdali autoři nevykazují škálu v parametru  $\sigma \equiv c^{1/\mu}$ , který se počítá v jednotkách  $[x]^{-1}$ , neboli

$$f'(x; \mu, \beta, \sigma, \Delta) = \sigma^{-1} f'(x/\sigma; \mu, \beta, 1, \Delta/\sigma).$$

Cauchyho hustota (146) je speciálním případem LSD  $f(x; 1, 0, c, \Delta)$ . Bližší pozornost zasluhuje i speciální případ  $\beta = 1$ . Pro  $\mu < 1$  získává  $F(k)$  analytickou strukturu Laplaceovy transformace, tj. LSD vymizí nalevo  $f(x; \mu, 1, c, \Delta) = 0$  pro  $x < \Delta$ . S Lévyho rozdělením

$$f(x > \Delta; \mu = \frac{1}{2}, \beta = 1, c, \Delta) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c^2}{2(x-\Delta)}}}{(x-\Delta)^{3/2}}$$

jsme se už setkali jako z rozdělením času prvního průchodu (114), ale je i limitou pro statistiku mrtvol Galtonova-Watsonova procesu (145), pokud je na startu větší počet  $X$ .

Pro  $\beta = 1$ ,  $\mu > 1$  pak integrál (152) diverguje a příslušná jednostranná stabilní distribuce neexistuje.

<sup>29</sup> V matematické literatuře se nejčastěji exponent značí  $\alpha$ , ba dokonce se (152) říká Lévyho  $\alpha$ -stabilní rozdělení. Ve fyzikální literatuře často vyhrazuje  $\alpha$  pro exponent času, zatímco  $\mu$  indikuje exponent prostorového rozdělení.