

Kapitola 24

Temperované distribuce a jejich integrální transformace

Shrnutí kapitoly: Tato kapitola se věnuje rozšíření integrálních transformací na distribuce. Nejprve si vhodně zúžíme třídu distribucí, na které budeme pracovat, na tak zvané „temperované distribuce“, což jsou spojitě lineární funkcionály nad Schwartzovým prostorem. Poté, co se seznámíme se základními vlastnostmi temperovaných distribucí, si pro ně zavedeme Fourierovu transformaci. Motivací nám bude případ regulárních distribucí. Vysvětlíme si zavedení konvoluce distribucí a dokážeme si, jak na ni působí Fourierova transformace. Pomocí vhodných konvolucí si zavedeme derivace libovolného (tedy i komplexního) řádu a spočteme si Fourierovu transformaci vybraných homogenních distribucí. Rozšíříme si Fourierovu transformaci i na jistý typ distribucí. Pak se budeme věnovat radiálně symetrickým distribucím v $\mathbb{R}^N$. Ukážeme si výpočet Fourierovy transformace pro jistou třídu radiálně symetrických funkcí a poté si spočteme transformaci holomorfní třídy distribucí odpovídající rozšíření funkcí $|x|^\lambda$. Na závěr si zavedeme pro vhodnou třídu distribucí i Laplaceovu transformaci. Hlavním výsledkem bude charakterizace Laplaceova obrazu těchto distribucí.

V následujícím textu, zejména pak v Sekci 24.3, se nám bude hodit pojem *okolí* v obecnějším smyslu.

Definice 24.0.1 (Okolí množiny). Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Pak jejím *okolím* nazýváme každou množinu $V \subset \mathbb{R}^N$ takovou, že pro ni existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^N$ splňující $A \subset U \subset V$.

Poznámka 24.0.2. (i) Definice se dá interpretovat tak, že okolím je zmíněná množina U a podle libosti k ní můžeme cokoliv přidávat.

(ii) Je přirozené porovnat naši novou definici pro případ jednobodové množiny s definicí, kterou jsme používali doposud. Tedy s okolími v podobě neprázdné otevřené koule. Uvědomme si, že jsme se vždy nacházeli v situaci (ať už jsme měli zajistit splnění nějakého předpokladu, nebo naopak šlo o závěr nějaké věty), že existuje okolí bodu, kde platí nějaký výrok a vně tohoto okolí platnost výroku není podstatná. Zde je jedno, kterou z definic okolí používáme. Skutečně, pokud výrok platí na okolí ve tvaru koule, pak za množiny U a V v naší nové definici můžeme položit zmíněnou kouli. Pokud by výsledek platil v novém smyslu, díky otevřenosti množiny U můžeme zkonstruovat požadovanou otevřenou kouli centrovanou ve zkoumaném bodě a ležící v U .

24.1 Prostor temperovaných distribucí

V oddíle věnovaném distribucím s kompaktním nosičem jsme se setkali s jevem, kdy při přechodu ke vhodné podmnožině distribucí můžeme rozšířit testovací prostor (u distribucí s kompaktním nosičem je možné testovat funkcemi z $C^\infty(\Omega)$). Uvedeného principu se přidržíme a *temperované distribuce* zavedeme jako podtřídu distribucí, které je možné testovat funkcemi ze Schwartzova prostoru. To ale znamená, že pracujeme pouze s případem $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Se Schwartzovým prostorem a s jeho základními vlastnostmi jsme se setkali v kapitole věnované Fourierově transformaci (v Kapitole 21 čtvrtého dílu skript). Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ jsme zavedli jako množinu všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^N.$$

Konvergenci posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ k funkci f ve Schwartzově prostoru jsme zavedli podmínkou

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} f \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^N.$$

Zároveň jsme si ukázali, že pokles funkcí ze Schwartzova prostoru charakterizují také podmínky (každé z nich také odpovídá jistá charakterizace konvergence na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)

$$\||x|^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^N,$$

$$\|(1 + |x|)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^N$$

a

$$\|(1 + |x|^2)^{|\alpha|} D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^N.$$

Zejména poslední podmínka nás inspiruje k pohledu na konvergenci v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, který pro nás bude výhodný při určování řádu distribuce.

Definice 24.1.1 (Prostor $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$). Nechť $p \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ definujeme jeho normu

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \alpha \in (\mathbb{N}_0)^N, |\alpha| \leq p}} (1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dále definujeme množinu

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)},$$

kde uzávěr bereme v prostoru $C^p(\mathbb{R}^N)$ vzhledem k normě $\varphi \mapsto \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)}$. Navíc pro $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ zavádíme na prostoru $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ konvergenci

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} 0 \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \|\varphi_k\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$$

a

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \varphi \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \varphi_k - \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} 0.$$

Poznámka 24.1.2. (i) Pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a každé $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$ platí (případy $p = 0, 1, 2$ jsou níže vypsány explicitně)

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}^0(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^N)} \leq \dots \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{S}^{p+1}(\mathbb{R}^N)} \leq \dots$$

a

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}^{p+1}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) \subset \dots \subset \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}^0(\mathbb{R}^N).$$

(ii) Pro posloupnost $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je výrok $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} 0$ ekvivalentní tomu, že pro každé $p \in \mathbb{N}_0$ platí $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} 0$.

Pomocí prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ je možné prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dokonce charakterizovat.

Tvrzení 24.1.3 (O charakterizaci prostorů $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$). *Pro každé $p \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N) = \{\varphi \in C^p(\mathbb{R}^N) : (1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)| \stackrel{|x| \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \text{ kdykoliv } |\alpha| \leq p\}.$$

Dále platí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}_0} \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N).$$

Důkaz. Dokažme množinovou inkluzi „ $\subset$ “ z první rovnosti. Nechť $\varphi \in \mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ a posloupnost $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ splňuje $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \varphi$. Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ proto existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$(1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^N, k \geq k_0 \text{ a } |\alpha| \leq p.$$

Navíc, protože $\varphi_{k_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$ a $|\alpha| \leq p$ (následující odhad sice obecně není stejnoměrný v α , ale pracujeme jen s konečným počtem multiindexů)

$$(1 + |x|^2)^p |D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| \leq \frac{1}{1 + |x|^2} (1 + |x|^2)^{p+1} |D^\alpha \varphi_{k_0}(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^2}.$$