

25.2.1 Lineární parciální diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 25.2.1 (Řešení lineární PDR 1. řádu). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, (25.2.1) je lineární PDR 1. řádu. Potom $u \in C^1(\Omega)$ je řešením rovnice (25.2.1) v oblasti Ω , jestliže pro všechna $x \in \Omega$ je splněno

$$\sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = f(x).$$

Nejprve se budeme zabývat případem homogenní lineární PDR 1. řádu, tedy rovnici

$$\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (25.2.2)$$

Budeme předpokládat, že $\sum_{i=1}^N |a_i(x)| > 0$ pro všechna $x \in \Omega$, tedy na celé otevřené množině, na které rovnici řešíme.

Definice 25.2.2 (Charakteristický systém, charakteristika). Systém ODR 1. řádu

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(x(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x \in \Omega \quad (25.2.3)$$

nazýváme charakteristickým systémem rovnice (25.2.2). Libovolné řešení $\varphi_i \in C^1((t_1, t_2))$, $i = 1, 2, \dots, N$ systému ODR (25.2.3) nazýváme charakteristikou rovnice (25.2.2).

Věta 25.2.3 (O ekvivalentní charakterizaci řešení lineární homogenní rovnice 1. řádu). *Funkce $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ je řešením rovnice (25.2.2) v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ právě tehdy, když je ψ konstantní podél každé charakteristiky rovnice (25.2.2).*

Důkaz. „ $\Rightarrow$ “ Nechť ψ splňuje

$$\sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Nechť $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$, $t \in (t_1, t_2)$ je charakteristikou rovnice (25.2.2). Potom

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) a_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) = 0, \end{aligned}$$

tedy ψ je konstantní podél každé charakteristiky.

„ $\Leftarrow$ “ Nechť je ψ konstantní podél každé charakteristiky. Zvolme libovolný bod $\xi \in \Omega$. Protože funkce $\{a_i\}_{i=1}^N$ jsou spojité v Ω , prochází bodem ξ alespoň jedna charakteristika, odpovídající jistému intervalu (t_1, t_2) (což plyne z Peanovy věty, tedy Věty 8.3.5 resp. 11.11.8). Fixujme jednu takovou charakteristiku $\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) : t \in (t_1, t_2)\}$ a bod $\tau \in (t_1, t_2)$ takový, že platí $(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_N(\tau)) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$. Protože $\psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t))$ je konstantní na (t_1, t_2) , platí

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)) a_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)). \end{aligned}$$

Volbou $t := \tau$ dostáváme, že rovnici (25.2.2) splňuje funkce ψ v bodě $\xi \in \Omega$. Bod ξ je ale libovolný bod množiny Ω , proto funkce $\psi(x)$ řeší (25.2.2) v oblasti Ω . $\square$

Příklad 25.2.4. Hledejme řešení rovnice

$$ay \frac{\partial u}{\partial x} + bx \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Charakteristický systém této rovnice má tvar

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx.$$

Pokud vynásobíme první rovnici bx a druhou ay a vztahy odečteme, dostáváme

$$\frac{d}{dt}(bx^2 - ay^2) = 0,$$

tedy

$$bx^2 - ay^2 = \text{konst.}$$

Řešením dané rovnice proto je

$$u(x, y) = U(bx^2 - ay^2),$$

kde $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce třídy $C^1(\mathbb{R})$.

Cvičení 25.2.5. Nalezněte řešení rovnice

$$\cos y \frac{\partial u}{\partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Příklad 25.2.6. (i) Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$ splňující $u(0, y) = \sin y$ pro $y \in \mathbb{R}$. Tato úloha se nazývá Cauchyovou úlohou pro PDR 1. řádu.

Charakteristický systém této rovnice je

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Dostáváme tedy

$$x = t + x_0, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + x_0t + y_0.$$

Hledáme tedy funkci, konstantní podél $x = t + x_0$, $y = \frac{1}{2}t^2 + x_0t + y_0$. Takovou funkci je

$$u(x, y) = U\left(y - \frac{1}{2}x^2\right),$$

neboť $y - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}t^2 + x_0t + y_0 - \frac{1}{2}(t + x_0)^2 = y_0 - \frac{1}{2}x_0^2 = \text{konst.}$ Tento vztah můžeme také odvodit podobně jako v předchozím příkladu. Vynásobíme-li první rovnici x a odečteme-li od ní druhou rovnici, dostáváme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right) = 0,$$

tedy opět máme $\frac{1}{2}x^2 - y = \text{konst.}$ Protože má být $u(0, y) = U(y) = \sin y$, je

$$u(x, y) = \sin\left(y - \frac{1}{2}x^2\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Hledejme řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

na celém $\mathbb{R}^2$ splňující $u(x, 0) = g(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Stejným postupem jako výše získáme

$$u(x, y) = U\left(y - \frac{1}{2}x^2\right) = V(\sqrt{x^2 - 2y}).$$

Protože má být $u(x, 0) = g(x)$, máme

$$u(x, y) = g(\sqrt{x^2 - 2y}). \quad (25.2.4)$$

Tedy na množině $\{(x, y) : y > 0 \wedge x \in (-\sqrt{2y}, \sqrt{2y})\}$ neumíme obecně nalézt řešení pomocí vztahu (25.2.4), mimo tuto množinu je dáno vztahem (25.2.4), přičemž musíme požadovat, aby funkce g byla sudá; máme totiž $u(x, 0) = V(|x|) = g(|x|)$.

Abychom vyjasnili strukturu prostoru řešení, zobecníme pojem závislosti funkcí, který jsme používali při řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic n -tého řádu (Definice 8.5.3).

Definice 25.2.7 (Závislost funkcí). (i) Funkce $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $u_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé na množině $\bar{O}$ (množina O je omezená otevřená), jestliže existuje funkce $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$ taková, že

(I) $F(u_1, u_2, \dots, u_N) \in C^1(\mathbb{R}^N)$

(II) F není v žádné oblasti $G \subset \mathbb{R}^N$ identicky rovná nule

(III) pro všechna $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \bar{O}$ je $F(u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)) = 0$.

(ii) Funkce $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N), u_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé v oblasti Ω , pokud pro každou omezenou podoblast O takovou, že $\bar{O} \subset \Omega$, platí, že $u_1(x_1, x_2, \dots, x_N), u_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, u_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ jsou závislé v $\bar{O}$.

Platí následující ekvivalentní charakterizace závislosti funkcí.

Věta 25.2.8 (Jacobiho kritérium závislosti funkcí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, $u_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Potom $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ jsou závislé v Ω právě tehdy, když pro všechna $x \in \Omega$ platí*

$$J_{\mathbf{u}}(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix} = 0.$$

Důkaz. Důkaz je poměrně dlouhý a technicky náročný. Lze ho nalézt v [Ka, str. 302–309]. $\square$

Pro případ, kdy je počet funkcí menší než počet proměnných, platí

Věta 25.2.9 (Kritérium nezávislosti funkcí pro menší počet funkcí). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, $u_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \leq N$. Potom jsou funkce $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ jsou nezávislé v Ω , jestliže pro všechna $x \in \Omega$ platí, že hodnota matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

je rovna m .

Důkaz. Důkaz pro $m = N$ plyne z předchozí věty, pro $m < N$ je pak nepříliš obtížným důsledkem této věty. Detaily lze nalézt opět v [Ka, str. 310]. $\square$

Příklad 25.2.10. (i) Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2$, $u_1(x_1, x_2) = \sin x_1$, $u_2(x_1, x_2) = \cos x_2$. Podle Věty 25.2.8 nejsou tyto funkce závislé v Ω (jsou tedy nezávislé), protože $J_{\mathbf{u}}(x) = -\cos x_1 \sin x_2$ a tento výraz není identicky nulový na žádné neprázdné