

Věta 25.2.30 (O kompatibilitě slabého a klasického řešení Burgersovy rovnice).

(i) *Pokud je u klasickým řešením úlohy (25.2.25), pak je též slabým řešením dle Definice 25.2.29.*

(ii) *Pokud je u slabým řešením dle Definice 25.2.29 a $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$, pak je u též klasickým řešením úlohy (25.2.25).*

Důkaz. (i) Tato část plyne z odvození nad definicí slabého řešení, jen si stačí uvědomit, že všechny integrály ve slabé formulaci jsou konečné.

(ii) Protože u je hladké dle předpokladů věty, lze integrovat „zpět per partes“. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} u + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + u \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x)) \varphi(0, x) dx. \end{aligned} \quad (25.2.27)$$

Odsud dostáváme podle Lemmatu 21.3.5 (toto lemma jsme využívali při důkazu Věty o inverzi Fourierovy transformace na $L^1(\mathbb{R}^N)$, tedy Věty 21.3.6), že platí s.v. na $(0, T) \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Protože je funkce u spojitě diferencovatelná, rovnost platí na $(0, T) \times \mathbb{R}$. Pokud se vrátíme k rovnosti (25.2.27), máme

$$\int_{\mathbb{R}} (u(0, x) - u_0(x)) \varphi(0, x) dx = 0$$

pro libovolné $\varphi \in C_0^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Proto použitím stejného argumentu jako výše je $u(0, x) = u_0(x)$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Slabé řešení je vhodným pojmem v situacích, kdy nemáme k dispozici klasické řešení, což budeme demonstrovat v následujícím příkladě.

Příklad 25.2.31. Uvažujme tzv. Riemannův problém pro Burgersovu rovnici, tedy úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \text{na } (0, \infty) \times \mathbb{R} \\ \text{a) } u_0(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{b) } u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (25.2.28)$$

Řešení je konstantní na charakteristikách. Počáteční hodnota je buď 0 nebo 1. Proto v případě, že počáteční hodnota je nulová, má charakteristika tvar

$$x = x_0, \quad t = s,$$

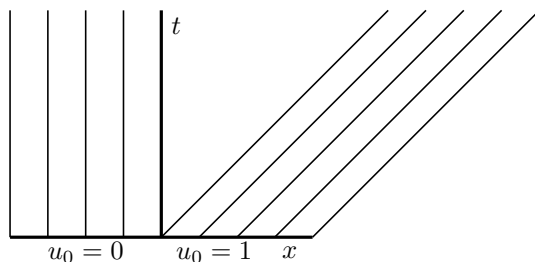
pokud je počáteční hodnota 1, pak má charakteristika tvar

$$x = s + x_0, \quad t = s.$$

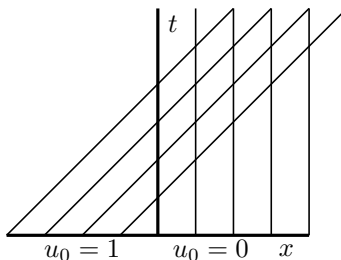
To vede k následujícímu problému. V případě úlohy a) není řešení definované na množině

$$S = \{(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : t \geq x\}.$$

V případě úlohy b) množinou S procházejí dvě charakteristiky, není tedy jasné, jak řešení na této množině definovat, situace je znázorněna na Obrázcích 25.1 a 25.2.



Obrázek 25.1: Tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě a).



Obrázek 25.2: Tvar charakteristik Riemannova problému pro Burgersovu rovnici v případě b).

Zřejmě někde na této množině vzniká rázová vlna, tedy řešení bude nespojité. Proto budeme muset pracovat se slabým řešením. Pokusme se postupovat následovně. Pro jisté $\alpha > 0$, které nalezneme níže, definujeme množinu

$$\Gamma := \{(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : t = \alpha x\}$$

a uvažujme charakteristiky jako na Obrázcích 25.3 a 25.4 níže.

Tedy řešení je po částech konstantní, v případě úlohy a) je řešení nulové na množině $\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 0, t > \alpha x\}$ a na množině $\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} : x > 0, t < \alpha x\}$ je řešení rovno 1, pro případ b) jsou hodnoty naopak. Na množině Γ není třeba slabé řešení definovat, jde o podmnožinu $\mathbb{R}^2$ nulové