
Obsah

Předmluva	v
Seznam označení	xiii
1 Základní pojmy	1
1.1 Matice a vektory	1
1.2 Skalární součin, norma a ortogonalita	8
1.3 Vektorové normy a standardní skalární součin	11
1.4 Projekce a projektory	14
1.5 Vzdálenost vektoru od podprostoru	16
1.6 Matice jako lineární zobrazení	18
1.7 Maticové normy	20
1.8 Jordanova věta	25
2 Schurova věta	35
2.1 Schurova věta	35
2.2 Důsledky Schurovy věty	39
2.3 Reálný Schurův rozklad	44
2.4 Funkce matic	47
3 Ortogonální transformace a QR rozklady	53
3.1 Givensovy rotace v \mathbb{R}^n	53
3.2 Householderovy reflexe v \mathbb{R}^n	57
3.3 Givensovy rotace v \mathbb{C}^n	59
3.4 Householderovy reflexe v \mathbb{C}^n	60
3.5 QR rozklad	61
3.5.1 QR rozklad užitím Givensových rotací	63
3.5.2 QR rozklad užitím Householderových reflexí	65
3.5.3 QR rozklad a Gram-Schmidtův ortogonalizační proces	66
3.5.4 Implementace Gram-Schmidtova procesu	67
3.5.5 Numerická stabilita QR rozkladu	70
3.5.6 Cena výpočtu Gram-Schmidtova procesu a QR rozkladu	73
3.6 Arnoldiho algoritmus	76
3.7 Řádkově orientovaný Gram-Schmidtův proces	78
3.8 QR rozklad se sloupcovou pivotací	81

3.8.1	Householderův QR rozklad se sloupcovou pivotací	82
3.8.2	Gram-Schmidtův QR rozklad se sloupcovou pivotací	84
4	LU rozklad a jeho numerická analýza	89
4.1	Prostá Gaussova eliminace a LU rozklad	90
4.2	Gaussova eliminace s částečnou pivotací	94
4.2.1	Maticový zápis Gaussovy eliminace s částečnou pivotací . . .	96
4.3	Numerická analýza Gaussovy eliminace	98
4.3.1	Citlivost systému lineárních rovnic na změny vstupních dat .	98
4.3.2	Numerická stabilita Gaussovy eliminace s částečnou pivotací	99
4.4	Choleského rozklad hermitovské pozitivně definitní matice	101
4.5	Rozklady hermitovských indefinitních matic	103
4.6	Zpětná stabilita Choleského rozkladu	104
4.7	Škálování	105
4.8	Iterační zpřesnění Gaussovy eliminace	106
4.9	Výpočetní náklady Gaussovy eliminace	107
4.10	Gaussova eliminace pro velké řídké úlohy	108
4.10.1	Pivotace versus zaplnění	108
4.10.2	Grafy a matice	109
4.10.3	Základní výpočetní rozdíl mezi LU a Choleského rozkladem .	112
4.10.4	Software	113
4.11	Srovnání LU a QR rozkladu pro řešení soustav rovnic	113
4.12	Algoritmické zápisy LU rozkladu	114
5	Singulární rozklad	121
5.1	Motivace – spektrální rozklad matice	121
5.2	Zavedení singulárního rozkladu a jeho vlastnosti	123
5.2.1	Vztahy mezi spektrálními rozklady matic A^*A a AA^*	123
5.2.2	Věty o singulárním rozkladu	125
5.2.3	Výpočet singulárního rozkladu	128
5.3	Použití singulárního rozkladu	129
5.3.1	Inverze a pseudoinverze matice	130
5.3.2	Normy a podmíněnost matice	131
5.3.3	Aproximace maticí nižší hodnosti	133
5.4	Jednoznačnost singulárního rozkladu	135
5.5	Singulární rozklad normální matice	136
5.6	Numerická hodnota matice	137
5.6.1	Numerická hodnota matice bez použití SVD	138
5.7	Použití SVD na kompresi dat	140
5.8	Polární rozklad a exponenciální tvar čtvercové matice	142
5.9	CS rozklad bloků unitární matice	143
5.10	Vzdálenost mezi podprostory a kanonické úhly	146

6	Úlohy nejmenších čtverců	151
6.1	Problém nejmenších čtverců (LS)	152
6.2	Metody řešení LS (plná sloupcová hodnota)	155
6.2.1	Řešení LS pomocí QR rozkladu	155
6.2.2	Řešení LS pomocí soustavy normálních rovnic	157
6.2.3	Řešení LS pomocí rozšířené soustavy rovnic	158
6.3	Řešení LS v obecném případě	159
6.4	Řešení LS pomocí QR rozkladu v obecném případě	160
6.5	Ill-posed problémy a regularizace	161
6.6	Total least squares – úplný problém nejmenších čtverců	165
6.6.1	Existence a jednoznačnost řešení	165
6.6.2	Core problém	167
7	Částečný problém vlastních čísel	171
7.1	Mocninná metoda	171
7.2	Arnoldiho metoda	173
7.3	Lanczosova metoda	176
7.3.1	Základní vlastnosti	177
7.3.2	Chování Lanczosovy metody v konečné aritmetice	181
7.4	Golub-Kahanova iterační bidiagonalizace	184
7.5	Jacobiho matice a další souvislosti	189
8	Metoda sdružených gradientů	193
8.1	Minimalizace kvadratického funkcionálu	194
8.2	Konvergence metody sdružených gradientů	197
8.3	Předpokmínění	201
8.3.1	Neúplný Choleského rozklad	203
8.4	Vztah mezi CG a Lanczosovým algoritmem	205
8.5	Volba počáteční aproximace řešení	207
8.6	Zastavovací kritéria	207
8.7	Vliv konečné aritmetiky	210
9	Metody Krylovových podprostorů	215
9.1	Klasické iterační metody	215
9.1.1	Konvergenční analýza klasických iteračních metod	216
9.1.2	Příklady klasických iteračních metod	217
9.2	Krylovovské metody	218
9.3	Krylovovské metody nad ortogonální bází	221
9.3.1	Zobecněná metoda minimálních reziduí (GMRES)	221
9.3.2	Metoda ortogonálních reziduí (FOM)	224
9.4	Krylovovské metody nad biortogonální bází	224
9.4.1	Nehermitovský Lanczosův algoritmus	225
9.4.2	Metoda bikonjugovaných gradientů (BiCG)	226
9.5	Sdružené gradienty a normální rovnice	228
9.5.1	CGNR	228
9.5.2	CGNE	229
9.6	Metoda LSQR	230

9.7 Faber-Manteuffelova věta	231
9.8 Předpokmínění, kritéria zastavení, volba x_0	234
Slovo na závěr	237
Řešení cvičení	239
Literatura	291
Software a knihovny matic	303
Seznam algoritmů	305
Rejstřík	307