

Keplerova hypotéza včera a dnes

(Poznámka nakladatele, aktualizace dne 1. 11. 2025)

Nadčasovost myšlenek autora knihy *O šestiúhelné sněhové vločce* dokazuje i dlouhý a poutavý příběh historie *Keplerovy hypotézy* o optimálním pakování koulí v trojrozměrném prostoru. Jedná se o tvrzení na str. 27 knihy, které v moderní formulaci říká, že *optimálním pakováním je stěnově centrované kubické pakování*. To známe ze starých hradů, kde se pomocí něho úsporně skladovaly dělové koule, jako na obrázku níže.



Pro pakování v pravidelných mřížích Keplerovu hypotézu dokázal teprve v polovině 19. století Carl Friedrich Gauss. Pro obecná pakování zůstal problém otevřený ještě mnohem déle, v roce 1900 se dokonce objevil i mezi slavnými 23 problémy Davida Hilberta.

V roce 1953 László Fejes Tóth ukázal, že důkaz Keplerovy hypotézy lze provést řešením konečné, byť velmi rozsáhlé, soustavy úloh lineárního programování. Úplný důkaz, s využitím výpočetní kapacity moderních počítačů na základě Tóthova přístupu, provedli Thomas Hales a Samuel Ferguson až počátkem 21. století. Jejich řešení bylo v roce 2009 odměněno Fulkersonovou cenou. V roce 2017 pak tým vedeným Halesem publikoval i první formálně verifikovaný důkaz Keplerovy hypotézy pomocí důkazových asistentů Isabelle a HOL Light.

Stěnově centrované kubické pakování má hustotu $\pi/\sqrt{18}$. To, že je optimální, znamená, že je jediné možné: v trojrozměrném prostoru existuje dokonce nespočetně mnoho neperiodických pakování se stejnou hustotou.

Pro dimenze $n > 3$ je problém optimálního pakování n -dimenzionálních koulí v n -dimenzionálním prostoru obecně stále otevřený. Je sice známo, že hustota optimálního pakování jako funkce dimenze kle-

sá exponenciálně, ale dosud nebyla ani formulována žádná hypotéza, jak by optimální pakování mělo vypadat. Úloha je přitom ve vyšších dimenzích důležitá například pro teorii kódování.

Výjimkou jsou dimenze 8 a 24, kde došlo k průlomům v roce 2017: Viazovska publikovala elegantní důkaz optimálního řešení pro dimenzi 8 (s hustotou $\pi^4/384$), a Cohen, Kumar, Miller, Radchenko a Viazovska v dimenzi 24 (s hustotou $\pi^{12}/12!$).

Ukrajinská matematická Maryna Viazovska (na obrázku níže) získala za tyto mimořádné výsledky řadu významných ocenění, mimo jiné v roce 2020 cenu Evropské matematické společnosti a v roce 2022 nejvyšší světové ocenění v matematice, Fieldsovu medaili. Je teprve druhou ženou v historii, které byla Fieldsova medaile udělena.



Další podrobnosti nalezne čtenář v článku Henryho Cohna *A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing* v Notices Amer. Math. Soc. 2(2017), <https://www.ams.org/publications/journals/notices/201702/rnoti-p102.pdf>.

I tento článek získal významné ocenění, Conantovou cenu za popularizaci matematiky v roce 2018.

prof. Jan Trlifaj (MFF UK)