

Kapitola 3

Maticice

Maticice jsme zavedli v minulé kapitole ke kompaktnímu zápisu soustav lineárních rovnic a popisu metod na jejich řešení. Maticice však mají mnohem širší využití, a proto se na ně v této kapitole podíváme podrobněji. Zavedeme několik typů matic a základní operace, které umožní s maticemi lépe a jednodušeji zacházet.

3.1 Základní operace s maticemi

Definice 3.1 (Rovnost). Dvě maticice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 3.2 (Součet). Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $A + B$ je maticice typu $m \times n$ s prvky $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Definice 3.3 (Násobek). Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak αA je maticice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Příklad 3.4 (Součet a násobek matic).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Výše zmíněné operace umožňují zavést přirozeně i odčítání jako $A - B := A + (-1)B$.

Speciální maticí je *nulová maticice*, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji 0 či $0_{m \times n}$ pro zdůraznění rozměru.

Tvrzení 3.5 (Vlastnosti součtu a násobků matic). *Pro reálná čísla α, β a maticice $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí*

- (1) $A + B = B + A$ (komutativita),
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativita),
- (3) $A + 0 = A$,

$$(4) \quad A + (-1)A = 0,$$

$$(5) \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$

$$(6) \quad 1A = A,$$

$$(7) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\text{distributivita}),$$

$$(8) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\text{distributivita}).$$

Důkaz. Důkaz vlastností je vesměs triviální, ale je vhodný pro procvičení formálního přístupu. Základní idea důkazů je redukce dané vlastnosti na odpovídající vlastnost reálných čísel. Dokážeme vlastnost (1), zbytek necháváme čtenáři.

(1) Nejprve ověříme, že $A + B$ i $B + A$ mají stejný typ. Pak ukážeme, že odpovídající si prvky jsou shodné: $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij} = (B + A)_{ij}$, kde jsme v druhé rovnici využili komutativitu sčítání reálných čísel. $\square$

Příklad 3.6. Jednoduchým použitím maticových operací je manipulace s obrázky. Necht' obrázek je reprezentován maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tak, že pixel obrázku na pozici (i, j) má barvu s číslem a_{ij} . Násobení matice A skalárem pak mění odstíny barev. Na obrázcích listovnice dole je ilustrována matice αA pro různé volby α . Pro $\alpha = 1$ dostaneme původní matici, pro $\alpha > 1$ se obrázek zesvětlí a naopak pro $\alpha < 1$ se obrázek ztmaví.



originál ($\alpha = 1$)



ztmavení ($\alpha = 0,5$)



originál ($\alpha = 1$)



zesvětlení ($\alpha = 1,5$)

$\square$

Nyní zavedeme násobení matic; to je definováno na první pohled trochu neobvykle, jeho význam vyplyne později v sekci 6.2.

Definice 3.7 (Součin). Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pak AB je matice typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik}B_{kj}$.

Příklad 3.8 (Mnemotechnika násobení matic). Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mnemotechnická pomůcka pro násobení matic AB , prvek na pozici (i, j) spočítáme jako skalární součin i -tého řádku matice A a j -tého sloupce matice B :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & \mathbf{3} & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

□

V kontextu s maticovým násobením potřebujeme zavést pojem *jednotková matice*. Značí se I či I_n a je to čtvercová matice řádu n s prvky $I_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $I_{ij} = 0$ jinak. Je to tedy matice s jedničkami na diagonále a s nulami jinde, přičemž *diagonálou* se rozumí prvky na pozicích $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\dots$. Schematicky

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Související pojem *jednotkový vektor* e_i je pak i -tý sloupec jednotkové matice, tj. $e_i = I_{*i}$.

Tvrzení 3.9 (Vlastnosti součinu matic). *Platí následující vlastnosti; α je číslo a A, B, C matice vhodných rozměrů.*

- (1) $(AB)C = A(BC)$ (asociativita),
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ (distributivita zleva),
- (3) $(A + B)C = AC + BC$ (distributivita zprava),
- (4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- (5) $0A = A0 = 0$,
- (6) $I_m A = A I_n = A$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.