KAPITOLA 1

ZÁKLADNÍ LOGICKÉ SYMBOLY, MNOŽINY, ZOBRAZENÍ, ČÍSLA

1.1. Logická symbolika
Logická struktura matematických důkazů

V tomto oddílu jsou stručně shrnuty základní pojmy a postupy matematické logiky a základní logická symbolika, jako například *výroky* A, B, *implikace* $A \Rightarrow B$ (A implikuje B, z A plyne B), *ekvivalence* $A \Leftrightarrow B$ (A je ekvivalentní B), *negace* non A (A neplatí) a další, která budeme v dalším textu používat. Je možná lepší si toto shrnutí přečíst až po prostudování celé knihy, neboť pak je čtenář lépe pochopí a ocení.

Základem každé vědy (tedy i matematiky a fyziky) je soubor jistých znalostí. To, co z těchto izolovaných poznatků dělá skutečnou vědu je, že tyto poznatky logicky uspořádáme, vytvoříme z nich systém. A k tomu slouží logika. Pomocí logického myšlení, logickým odvozováním získáváme z daných faktů nová fakta nebo hypotézy (poslední opět konfrontujeme s experimentem, neboť by se mohlo stát, že výchozí poznatky nezobrazují skutečnost správně).

Pravidla logického odvozování se musí řídit jistými zákony: nesmí se například stát, abychom dospěli k logickému sporu, pokud tento již není v předpokladech. Je-li něco logicky sporné, pak to nemůže být pravdivé. Není-li to v logickém sporu, nemusí to ještě být pravda. Je třeba se opět obrátit ke skutečnosti, zda byla zobrazena správně. Logika tedy umožňuje vyloučit některé určitě nesprávné hypotézy.

Je možné bez přeceňování tvrdit, že matematika díky své přesnosti je kromě jiného velmi užitečným materiálem, na němž je možné si vypěstovat dobré logické myšlení.

Základními pojmy, s nimiž logika pracuje, jsou: *výroky, predikáty, logické spojky, kvantifikátory* a *základní zákony.*

Výrok je věta, o níž má smysl říci, že je pravdivá. Například : „Číslo 2 je menší než 3" je pravdivý výrok. „Číslo 5 je záporné" je nepravdivý výrok.

Predikát neboli **výroková funkce** je předpis $\mathcal{P}$ (zobrazení – viz oddíl 3.), který každému prvku x z daného pole objektů (množiny) přiřazuje výrok, tj. pro každé x z daného pole je $\mathcal{P}(x)$ výrok. Je-li například pole objektů množina racionálních čísel

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$\mathbb{Q}$, pak výrokovou funkcí je například následující: je-li x z $\mathbb{Q}$, pak je $\mathcal{P}(x)$ věta: „x je menší než 3”. $\mathcal{P}(x)$ je pravdivý výrok pro racionální čísla menší než 3 a nepravdivý pro racionální čísla větší nebo rovná 3.

Logické spojky a **kvantifikátory** slouží k vytváření nových, složitějších výroků z daných výroků a predikátů. Jejich význam je dán, řekneme-li, kdy pomocí nich vytvořený výrok je pravdivý.

Základními logickými spojkami jsou následující (A, B jsou dané výroky):

1) $\vee$ (vel = nebo) – **disjunkce**:
Výrok $A \vee B$ je pravdivý právě když je pravdivý aspoň jeden z výroků A, B (mohou být pravdivé i oba). Je nepravdivý právě když jsou nepravdivé oba výroky A, B.

2) $\wedge$ (et = i) – **konjunkce**:
Výrok $A \wedge B$ je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky A, B. Je nepravdivý právě když alespoň jeden z výroků A, B je nepravdivý.

3) non (= ne) – **negace**:
Výrok non A znamená, že není pravda, že platí A. non A je tedy pravdivý právě když A je nepravdivý.

4) $\Rightarrow$ – **implikace**:
Výrok $A \Rightarrow B$ je pravdivý právě když nastává jedna z následujících možností

a) A je pravdivý, B je pravdivý
b) A je nepravdivý, B je pravdivý
c) A je nepravdivý, B je nepravdivý

a není pravdivý v případě, že je A pravdivý a B nepravdivý. Implikace se čte některým z následujících způsobů: platí-li A, pak platí B, z A plyne B, A implikuje B, A je postačující podmínkou pro B, B je nutnou podmínkou pro A.

5) $\Leftrightarrow$ – **ekvivalence**:
Výrok $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$. Ekvivalence se čte některým z následujících způsobů: A je ekvivalentní B, A platí právě když platí B, A je nutnou a postačující podmínkou pro B, B je nutnou a postačující podmínkou pro A.

Základní kvantifikátory jsou tyto (M je pole objektů, $\mathcal{P}(x)$ je predikát):

1) $\exists$ – **existenční kvantifikátor**:
Výrok $\underset{x\in M}{\exists} \mathcal{P}(x)$ (čteme existuje $x \in M$, že platí $\mathcal{P}(x)$) je pravdivý výrok právě když existuje nějaké $x_0 \in M$, že výrok $\mathcal{P}(x_0)$ je pravdivý.

2) $\forall$ – **obecný kvantifikátor:**
Výrok $\underset{x\in M}{\forall} \mathcal{P}(x)$ (čteme pro každé $x \in M$ platí $\mathcal{P}(x)$) je pravdivý výrok právě když pro každý objekt $y \in M$ je výrok $\mathcal{P}(y)$ pravdivý.

Základní zákony jmenujme dva:

1) **Zákon sporu**:
Pro žádný výrok A není pravda současně A i non A (tj. $A \wedge$ non A je nepravdivý pro každý výrok A.

2) **Zákon vyloučeného třetího**:
Pro každý výrok A je buď A pravdivé nebo non A pravdivé (tj. $A \vee \text{non}\, A$ je pravdivý výrok pro každý výrok A).

Z těchto zákonů plyne, že pro každý výrok A nastane právě jedna z možností:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A \text{ je pravdivé, } \text{non}\, A \text{ je nepravdivé} \\ \text{b)} & A \text{ je nepravdivé, } \text{non}\, A \text{ je pravdivé} \end{array}$$

Tj. právě jeden z výroků A a non A je pravdivý.

Vlastnosti implikace a ekvivalence.

Platí

1) $A \Rightarrow A$ (reflexivnost implikace).
2) Platí-li $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, pak platí také $A \Rightarrow C$ (tranzitivnost implikace). Můžeme proto psát $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.
3) $A \Leftrightarrow A$ (reflexivnost ekvivalence).
4) Platí-li $A \Leftrightarrow B$, pak platí $B \Leftrightarrow A$ (symetričnost ekvivalence).
5) Platí-li $A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, pak platí také $A \Leftrightarrow C$ (tranzitivnost ekvivalence).

Poznamenejme, že implikace není symetrická, tj. může platit $A \Rightarrow B$ a přitom neplatit $B \Rightarrow A$.

Některé důležité ekvivalence.

1) $\text{non}(\text{non}\, A) \Leftrightarrow A$
2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, B) \Rightarrow (\text{non}\, A))$
3) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, B) \Leftrightarrow (\text{non}\, A))$
4) $(A \vee B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non}\, A) \wedge (\text{non}\, B))$
5) $\text{non}(A \vee B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \wedge (\text{non}\, B))$
6) $(A \wedge B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non}\, A) \vee (\text{non}\, B))$
7) $\text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \vee (\text{non}\, B))$
8) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \vee B)$
9) $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\text{non}\, B))$
10) $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
11) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
12) $\text{non}(\underset{x \in M}{\exists} \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in M}{\forall} \text{non}\, \mathcal{P}(x)$
13) $\text{non}(\underset{x \in M}{\forall} \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in M}{\exists} \text{non}\, \mathcal{P}(x)$

Způsoby důkazů.

1) Přímý důkaz.
2) Důkaz rozborem možností.
3) Nepřímý důkaz.
4) Důkaz sporem.

Nepřímý důkaz je založen na ekvivalenci 2.: místo $A \Rightarrow B$ se dokazuje $\mathrm{non}\, B \Rightarrow \mathrm{non}\, A$. Při důkazu sporem postupujeme takto: chceme-li dokázat $A \Rightarrow B$, předpokládáme, že platí $A \wedge \mathrm{non}\, B$ a z toho odvodíme spor. $A \wedge nonB$ tedy neplatí. Platí-li však A, nemůže platit $\mathrm{non}\, B$, a tedy musí platit B.

1.2. Množiny

Z množinové symboliky nám pro začátek postačí následující:

1) $x \in M$ – x je prvkem množiny M,
2) $x \notin M$ – x není prvkem množiny M,
3) $P \subset M$ – P je podmnožinou (částí) množiny M, což podrobněji znamená, že každý prvek z P je také prvkem M. Rovnost dvou množin $M = P$ značí, že platí zároveň jak $M \subset P$ tak $P \subset M$.
4) $M \cup P$ – sjednocení množin M a P – což značí, že je to množina všech těch x, které jsou alespoň v jedné z množin M, P.
5) $M \cap P$ – průnik množin M a P – což značí množinu všech těch x, které jsou jak v M tak zároveň v P.
6) $\emptyset$ značí tzv. *prázdnou* množinu, což je množina, která nemá žádný prvek.

Pro ty čtenáře, kteří si chtějí hned trochu rozšířit své znalosti o množinách a také pro ty, kteří při použití nějakého pojmu v dalším textu jej zde mohou najít, jsou určeny následující řádky psané petitem.

Množina je soubor věcí (objektů), které nazýváme jejími prvky. Důležité je, že každý objekt buď patří do dané množiny M nebo do ní nepatří, tj. nastává právě jedna z možností:

a) x je prvkem množiny M – x patří do M – $x \in M$,
b) x není prvkem množiny M – x nepatří do M – $x \notin M$.

Dlouho převládalo mínění, že intuitivní chápání množiny je postačující a rozumné. Ukázalo se však, že může vést k logickým sporům (ke sporu vede například pojem *množiny všech množin*). Proto vznikly různé axiomatické teorie množin, jimiž se zde ovšem zabývat nebudeme.

Způsoby zadání množiny. Množinu je možné zadat různými způsoby. Uveďme některé z nich:

a) Vyjmenováním všech prvků, které do ní patří:

$M_1 = \{1, 7, 8, 20, 400\}$ je množina, která obsahuje právě čísla 1,7,8,20,400.
$M_2 = \{$*Praha, Bratislava, Varšava, Riga, Vilnius, Minsk, Kyjev, Moskva, Lublaň, Záhřeb, Bělehrad, Sofia*$\}$ je množina, která obsahuje právě vyjmenovaná města.
(Tento způsob je možný jen u tzv. konečných množin – viz dále.)

b) Pomocí jiné již známé množiny:

Známe-li množinu celých čísel $\mathbb{Z}$, můžeme definovat celé mocniny čísla 2, a tedy také množinu M_3 všech celých mocnin čísla 2, tj. $M_3 = \{2^x;\ x \in \mathbb{Z}\}$.

c) Zadáním nějaké vlastnosti prvků:

M_4 je množina všech občanů ČR narozených v roce 1970.
Množinu M_2 můžeme zadat jako množinu hlavních měst slovanských států.
Budeme psát $M = \{x;\ x$ má vlastnost $V\ \}$, jestliže množina M obsahuje právě všechna taková x, která mají vlastnost V.

Podmnožiny. Rovnost množin.

Definice 1.1. Řekneme, že množina P je podmnožinou (částí) množiny M, jestliže každý prvek množiny P je také prvkem množiny M. Píšeme pak $P \subset M$.

Příklad 1.1. Je-li $\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel, $\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel, pak je $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Je-li $\mathbb{R}^+$ množina všech kladných reálných čísel, pak neplatí ani $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^+$, ani $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{Z}$.

Definice 1.2. Řekneme, že množiny M a P se rovnají ($M = P$), jestliže platí $M \subset P$ a současně i $P \subset M$.

Poznámka 1.1. Tak se také často rovnost dvou množin dokazuje, viz příklad 1.3. dále.

Příklad 1.2. Nechť $M_1 = \{x;\ x \in \mathbb{Z},\ 0 \le x < 5\}$, $M_2 = \{x;\ x \in \mathbb{Z},\ x \ge 0,\ x^2 < 25\}$. Potom je zřejmě $M_1 = M_2$, neboť obě obsahují právě čísla $0, 1, 2, 3, 4$.

Příklad 1.3. Nechť $\widetilde{M_1} = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ 0 \le x < 5\}$, $\widetilde{M_2} = \{x;\ x \in \mathbb{R}\ x \ge 0,\ x^2 < 25\}$. Potom je $\widetilde{M_1} = \widetilde{M_2}$. Při důkazu nemůžeme postupovat jako v předchozím příkladu. Postupujme přesně podle definice 1.2. Nechť $x \in \widetilde{M_1}$, tj. $x \in \mathbb{R}$ a $0 \le x$ a $x < 5$. Podle pravidel o násobení nerovností je také $x^2 < 25$, a tedy $x \in \widetilde{M_2}$. Je-li naopak $x \in \widetilde{M_2}$, pak podle pravidla o odmocňování nerovností je $x < 5$, a tedy $x \in \widetilde{M_1}$.

Cvičení 1.1. Dokažte, že platí $M_1 = M_2$, je-li $M_1 = \{x :\ x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 2 < 0\}$, $M_2 = \{x :\ x \in \mathbb{R},\ x^2 < 4,\ x > -1\}$.

Poznámka 1.2. Pro každou množinu M je zřejmě $M \subset M$.

Definice 1.1a. Je-li $P \subset M$, $P \ne M$, pak říkáme, že P je *vlastní* podmnožinou množiny M.

Definice 1.3. Množinu všech podmnožin množiny M označujeme $\exp M$ nebo také 2^M. Množinu, která neobsahuje žádný prvek nazýváme *prázdnou* a označujeme ji $\emptyset$.

Poznámka 1.3. Prázdná množina je zřejmě podmnožinou každé množiny. Užitečnost zavedení tohoto na první pohled protismyslného pojmu uvidíme při zavedení operací s množinami, a také v následujícím příkladu. Z logicko-filozofického je to množina, které odpovídá číslo nula, o jehož užitečnosti jistě nikdo nepochybuje.