KAPITOLA 5

VLASTNOSTI SPOJITÝCH A DERIVOVATELNÝCH FUNKCÍ

Pod slovem funkce budeme v této kapitole vždy rozumět reálnou nebo komplexní funkci jedné reálné proměnné, pokud nebude řečeno jinak.

5.1. Lokální vlastnosti

Následující věty jsou snadnými důsledky vět 3.7. a 3.10. Čtenář si může jejich důkaz provést za cvičení.

Věta 5.1. *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak existuje $U_\gamma(a)$, na němž je f omezená. Analogicky pro jednostrannou spojitost.*

Věta 5.2. *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak platí*

(1) *je-li $f(a) \neq 0$, pak existuje $U_\gamma(a)$, že $|f(x)| \geq |f(a)|/2 > 0$ na $U_\gamma(a)$.*
(2) *je-li f reálná, a $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, pak existuje $U_\gamma(a)$, že $f(x) \geq f(a)/2 > 0$ $(f(x) \leq f(a)/2 < 0)$ na $U_\gamma(a)$.*

Analogicky pro jednostrannou spojitost.

Definice 5.1. Řekneme, že funkce f je *neklesající (rostoucí) v bodě* $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $U^*_\gamma(a)$ tak, že $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) < f(a))$ pro $x \in U^{*-}_\gamma(a)$ a $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) > f(a))$ pro $x \in U^{*+}_\gamma(a)$. Řekneme, že funkce f je *nerostoucí (klesající) v bodě* $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $U^*_\gamma(a)$ tak, že $f(x) \geq f(a)$ $(f(x) > f(a))$ pro $x \in U^{*-}_\gamma(a)$ a $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) < f(a))$ pro $x \in U^{*+}_\gamma(a)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *lokální maximum (lokální minimum)*, jestliže existuje $U^*(a)$ tak, že $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ pro $x \in U^*(a)$. Platí-li místo neostrých nerovností ostré,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX mluvíme o *ostrém lokálním maximu* *(ostrém lokálním minimu)*. Lokální maxima a minima (ostrá) se nazývají *lokálními extrémy (ostrými)*.

Příklad 5.1. Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ má ostrá lokální maxima (minima) v bodech $\pi/2 + 2k\pi$ $(-\pi/2 + 2k\pi)$, k celé. V ostatních bodech je buď rostoucí nebo klesající.

Věta 5.3. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci (vlastní či nevlastní). Potom platí*

(1) *je-li $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, je f v bodě a rostoucí (klesající).*
(2) *má-li f v bodě a lokální extrém, je $f'(a) = 0$.*
(3) *je-li f v bodě a neklesající (nerostoucí), pak je $f'(a) \geq 0$ $(f'(a) \leq 0)$.*

Důkaz. 1) Buď $f'(a) > 0$. Podle věty 3.10. existuje $U^*(a)$ tak, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ na $U^*(a)$, a tedy $f(x) - f(a) > 0$ pro $x - a > 0$ a $f(x) - f(a) < 0$ pro $x - a < 0$, a f je proto v bodě a rostoucí. Případ $f'(a) < 0$ přenecháváme čtenáři za cvičení.

2) Nechť má f v bodě a například lokální maximum, tj. $f(x) \leq f(a)$ pro $x \in U^*(a)$. Potom ovšem je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (≤ 0) pro $x - a < 0$ (> 0). Z první nerovnosti ovšem dostaneme $f'_-(a) \geq 0$ a z druhé $f'_+(a) \leq 0$. Poněvadž $f'(a)$ existuje, je $0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leq 0$.

3) Poslední tvrzení dostaneme z prvního použitím obecné věty $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \operatorname{non} B \Rightarrow A$: f nerostoucí $\Rightarrow$ non(f rostoucí) $\Rightarrow$ $\operatorname{non} f'(a) > 0$ $\Leftrightarrow f'(a) \leq 0$.

Poznámka 5.1. Věta udává postačující (ale nikoli nutné) podmínky pro to, aby funkce byla rostoucí (klesající) v bodě a nutnou (nikoli postačující) podmínku pro to, aby funkce, která má v daném bodě derivaci, měla v tomto bodě lokální extrém. Poslední tvrzení je nutná (a nikoli postačující) podmínka pro to, aby funkce byla v bodě a neklesající (nerostoucí).

Příklad 5.2. Funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ nemá v bodě 0 extrém, přestože je $f'(0) = 0$. Je v tomto bodě rostoucí, i když není $f'(0) > 0$.

5.2. Globální vlastnosti

Věta 5.4 (omezenost). *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak je na tomto intervalu omezená.*

Důkaz. Kdyby f nebyla na $\langle a, b\rangle$ omezená, pak by existovala posloupnost $x_n \in \langle a, b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, že $|f(x_n)| \geq n$. Posloupnost x_n je omezená, a proto z ní lze podle věty 2.13. vybrat konvergentní vybranou posloupnost x_{k_n}, $x_{k_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$ pro $n \to \infty$. Podle věty 2.9. je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Potom ovšem f není omezená na žádném okolí bodu x_0, a tedy podle věty 5.1. nemůže být spojitá v bodě x_0, a tedy ani na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Následující příklady ukazují, že na neomezeném nebo neuzavřeném intervalu věta obecně neplatí. Stačí také nespojitost v jednom bodě intervalu, aby funkce mohla být neomezená.

Příklad 5.3. Funkce $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1\rangle$ je na $(0, 1\rangle$ spojitá, ale není tam omezená. Podobně funkce $g(x) = x$ na intervalu $\langle 1, \infty)$.

Příklad 5.4. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{pro } x \in (0, 1\rangle, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je na $\langle 0, 1\rangle$ nespojitá pouze v bodě 0 a je tam neomezená.

Tato věta se dá zobecnit následovně:

Věta 5.4'. *Nechť f je spojitá na intervalu J a má vlastní jednostranné limity v jeho krajních bodech. Pak je f na J omezená.*

Důkaz. Z existence vlastních limit v krajních bodech plyne omezenost f na jistých okolích U^+ a U^- těchto bodů. Na $J \setminus (U^+ \cup U^-)$ (což je omezený uzavřený interval) je f spojitá a podle věty 5.4. omezená. Potom je ovšem omezená na $J = (J \setminus (U^+ \cup U^-)) \cup U^+ \cup U^-$.

Definice 5.2. Nechť f je reálná funkce, $M \subset \mathcal{D}_f$, $M \neq \emptyset$. Označíme

$$\sup_M f = \sup f(M) = \sup\{f(x);\ x \in M\}$$
$$\inf_M f = \inf f(M) = \inf\{f(x);\ x \in M\}$$

Řekneme, že funkce f *nabývá na M svého maxima (minima)*, má-li množina $f(M)$ maximum (minimum), tj. existuje-li $x_0 \in M$ tak, že

$f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$. Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme *maximem (minimem) funkce f na množině M* a označujeme jej $\max_M f$ $(\min_M f)$.[7]

Poznámka 5.2. Každá reálná funkce má na M supremum i infimum ($\in \mathbb{R}^*$), obecně tam ovšem nemusí mít maximum a minimum. Dále je zřejmé, že $\max_M f = \sup_M f$, $\min_M f = \inf_M f$, pokud maximum resp. minimum existuje.

Příklad 5.5. Pro funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ je $\sup_{\mathbb{R}} f = \pi/2$, $\inf_{\mathbb{R}} f = -\pi/2$, ale maximum ani mininum na $\mathbb{R}$ tato funkce nemá (je $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$ pro $x \in \mathbb{R}$).

Užitečné je si uvědomit platnost následujícího tvrzení, jehož důkaz je zřejmý:

Věta 5.5. *Nabývá-li funkce f maxima (minima) na intervalu J v bodě $x_0 \in J$, pak je x_0 buď krajní bod intervalu J, nebo je to takový vnitřní bod intervalu J, v němž má f lokální maximum (minimum).*

Věta 5.6 (o nabývání maxima a minima)**.** *Nechť reálná funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f nabývá na $\langle a, b \rangle$ svého maxima i minima.*

Důkaz. Podle věty 5.4. je f na $\langle a, b \rangle$ omezená, a tedy $G = \sup_{\langle a,b \rangle} f \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema existuje posloupnost $x_n \in \langle a, b \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, že $G - 1/n < f(x_n) \leq G$, a tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$. Z posloupnosti x_n můžeme vybrat konvergentní vybranou posloupnost $x_{k_n} \to x_0 \in \langle a, b \rangle$. Díky spojitosti f je podle Heineho věty $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$. Na druhé straně je $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = G$, a tedy $f(x_0) = G$ a $f(x_0) = \max_{\langle a,b \rangle} f$. Pro mimimum se důkaz provede analogicky, anebo lze užít již dokázané tvrzení o maximu na funkci $\tilde{f} = -f$ (zřejmě je $\max_{\langle a,b \rangle} \tilde{f} = -\min_{\langle a,b \rangle} f$).

Poznámka 5.3. Spojitost na uzavřeném omezeném intervalu je pouze postačující podmínkou pro nabývání maxima a minima. Na druhé straně

[7]Supremum resp. infimum funkce jsme již definovali v kapitole 3. Uvádíme je zde znovu pro pohodlí čtenáře.

pro neuzavřený interval tvrzení věty obecně neplatí. Viz následující příklady.

Příklad 5.6. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$ nabývá na $\mathbb{R}$ maxima $(= 1)$ ve všech bodech $x > 0$ a minima $(= -1)$ ve všech bodech $x < 0$.

Příklad 5.7. Funkce $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nenabývá ani maxima ani minima na žádném otevřeném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

Příklad 5.8. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1), \\ 0 & x = -1, 1 \end{cases}$$

nenabývá na $\langle -1, 1\rangle$ ani maxima, ani minima (není na $\langle -1, 1\rangle$ spojitá). Zřejmě je $\sup\limits_{\langle -1,1\rangle} f = 1$, $\inf\limits_{\langle -1,1\rangle} f = -1$.

Pro úplnost uveďme větu, kterou jsme dokázali a použili v kapitole 3. (věta 3.24):

Věta 5.7 (o nabývání všech mezihodnot)**.** *Nechť f je reálná funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, a, $b \in \mathbb{R}$. Potom f nabývá na $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.*

Důsledek. *Nechť f je reálná funkce definovaná a spojitá na intervalu I. Potom $f(I)$ je opět interval . Jeho koncovými body jsou body $\inf\limits_I f$ a $\sup\limits_I f$. Tyto koncové body patří do něj právě tehdy, nabývá-li f na I minima resp. maxima.*

Důkaz. Pro omezený uzavřený interval I to plyne okamžitě z vět 5.6. a 5.7. V obecném případě je předně $f(I) \subset \langle \inf\limits_I f, \sup\limits_I f\rangle$. Jsou-li $x_n, y_n \in I$ takové, že $f(x_n) \to \inf\limits_I f$, $f(y_n) \to \sup\limits_I f$ pro $n \to \infty$, pak podle věty 5.7. musí $f(I)$ obsahovat celý interval $\langle f(x_n), f(y_n)\rangle$, a tedy i otevřený interval $(\inf\limits_I f, \sup\limits_I f)$. Zbytek je zřejmý.

Definice 5.3. Řekneme, že reálná nebo komplexní funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in I$ takové, že $|x' - x''| < \delta$ je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.