KAPITOLA 7

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Význam diferenciálních rovnic je jistě každému fyzikovi zřejmý. Stačí připomenout například *Newtonův pohybový zákon*: síla, působící na těleso je úměrná zrychlení. Nechť se hmotný bod pohybuje po přímce. Jsou-li m, $w(t)$, $s(t)$ a $f(t)$ postupně jeho hmotnost, zrychlení, vzdálenost od daného pevného bodu této přímky a síla na něj působící (ve směru této přímky) v okamžiku t, pak podle Newtonova zákona je $mw(t) = f(t)$, což díky vztahu $w(t) = s''(t)$ dává diferenciální rovnici $ms''(t) = f(t)$ pro funkci $s(t)$. Diferenciální proto, že se v ní vyskytuje derivace neznámé funkce. (Slovo *obyčejné* v nadpisu kapitoly vyjadřuje to, že půjde o rovnice pro funkci jedné proměnné, na rozdíl od tzv. *parciálních* diferenciálních rovnic pro funkci více proměnných.) Jiným příkladem je například rovnice pro pohyb tělesa, zavěšeného na pružině: $ms''(t) = -ks(t) + mg$, kde m je hmota tělesa, $s(t)$ jeho výchylka od rovnovážné polohy v okamžiku t a g je gravitační zrychlení, neboť na těleso působí jednak síla zemské přitažlivosti mg, jednak odpor pružiny, který je úměrný výchylce od rovnovážné polohy. Celková síla je proto $-ks(t) + mg$, kde k je koeficient úměrnosti, daný vlastnostmi pružiny. Uvedené příklady jsou (jak uvidíme dále) velmi jednoduché.

Zavedení pojmu derivace umožnilo matematicky zachytit pohyb. V jisté době bylo nadšení tímto poznatkem tak veliké, že se na diferenciální rovnice pohlíželo jako na univerzální prostředek zkoumání – stačí napsat pro každý děj diferenciální rovnici (nebo rovnice), tyto vyřešit a „poznání světa" je hotovo. Bohužel není obecně jednoduché ani napsat diferenciální rovnici, ani tuto rovnici vyřešit. V současné době druhou úlohu usnadňují počítače, ale ani ty nemají neomezené možnosti. A navíc je i při použití počítačů dobré vědět něco z teorie diferenciálních rovnic.

V této kapitole vyložíme některé elementární metody řešení rovnic speciálního typu (převážně prvního řádu) a teorii *lineárních* obyčejných diferenciálních rovnic. Hlubší poznatky najde čtenář v doporučené literatuře.

7.1. O funkcích více proměnných

V této kapitole budeme potřebovat několik pojmů z teorie funkcí více proměnných, která bude podrobně vyložena v následujících dvou kapitolách. Pro pohodlí čtenáře je zde nyní připomeneme.

$\mathbb{R}_r$ značíme množinu uspořádaných r-tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $x_i \in \mathbb{R}_1 \equiv \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. *Reálnou (komplexní) funkcí r reálných proměnných* na množině $\Omega \subset \mathbb{R}_r$ rozumíme zobrazení f množiny Ω do $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}$ je množina komplexních čísel). $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ značíme hodnotu funkce f v bodě $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$. *Parciální derivací* podle i-té proměnné v bodě x^0 funkce f rozumíme derivaci funkce $\psi_i(t) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_r^0)$ v bodě $t = x_i^0$. Pro $\varepsilon > 0$ ε-*okolím* bodu $x^0 \in \mathbb{R}_r$ rozumíme množinu

$$U_\varepsilon(x^0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x; x \in \mathbb{R}_r, (\sum_{i=1}^{r}(x_i - x_i^0)^2)^{1/2} < \varepsilon\}.$$

Funkci f n proměnných nazveme *spojitou* v bodě x^0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$. Řekneme, že množina $\Omega \subset \mathbb{R}_r$ je *otevřená*, jestliže s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí.

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu zařazujeme až do kapitoly 9, protože k jejich výkladu je potřebná znalost mnoha věcí z teorie funkcí více proměnných.

7.2. Základní definice. Věty o existenci a jednoznačnosti počáteční úlohy

Definice 7.1. Nechť $\Phi(t, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je reálná funkce $(n+2)$ reálných proměnných, která vzhledem k proměnné z_n není konstantní[1], definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+2}$. Potom symbol

$$\Phi(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1}$$

[1]Například $\partial\Phi/\partial z_n \not\equiv 0$. Tento požadavek je tu proto, aby to nebyla rovnice řádu nižšího než n.

nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu* pro neznámou reálnou funkci $y(t)$ jedné reálné proměnné t. *Řešením v Ω rovnice* (7.1) *na intervalu $I \subset \mathbb{R}$* nazýváme takovou funkci $y(t)$, která má na I všechny derivace do řádu n včetně, pro každé $t \in I$ je $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in \Omega$ a platí

$$\Phi(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \ t \in I. \tag{7.2}$$

Poznámka 7.1. Patří-li k intervalu I jeho koncový bod, uvažujeme v tomto bodě příslušné jednostranné derivace.

Poznámka 7.2. Pod pojmem řešení vlastně chápeme dvojici: interval I a funkci $y(t)$ na něm definovanou. Proto považujeme za různá řešení funkci $y(t)$ na I a funkci $\tilde{y}(t)$ na $\tilde{I}$, je-li $I \subset \tilde{I}$, $y(t) = \tilde{y}(t)$ na I, ale $I \neq \tilde{I}$.

Abychom zachytili to, co mají řešení z této poznámky společné, zavádíme následující definici:

Definice 7.2. Je-li $y(t)$ řešením (7.1) v Ω na intervalu I a $\tilde{y}(t)$ řešením (7.1) v Ω na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$, přičemž $y(t) = \tilde{y}(t)$ na I, pak říkáme, že $\tilde{y}$ je *prodloužením* y na interval $\tilde{I}$ a y je *zúžením* $\tilde{y}$ na interval I. Takové řešení, které v Ω nelze prodloužit nazýváme *maximálním v* Ω.

Příklad. Funkce e^t, $t \in (-1, 1)$ je řešením rovnice $y' = y$ a je to maximální řešení v pásu $(-1, 1) \times \mathbb{R}$, ale není maximální v $\Omega = \mathbb{R}_2$, neboť funkce e^t, $t \in \mathbb{R}$ je jeho prodloužením. Poslední funkce je řešení, které je už maximální v $\mathbb{R}_2$.

Poznámka 7.3. Je-li $y(t)$ řešením na I rovnice (7.1), pak to automaticky znamená, že pro každé $t \in I$ je $(n+2)$-tice $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t))$ v definičním oboru funkce Φ.

V dalším se budeme převážně zabývat speciálním případem rovnic (7.1) – tzv. *rovnicemi řešenými vzhledem k nejvyšší derivaci*, což jsou rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{7.1'}$$

kde f je reálná funkce $(n+1)$ proměnných, definovaná na množině $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}_{n+1}$. Odpovídá to funkci $\Phi = z_n - f(t, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$, definované na $\Omega = \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}$.

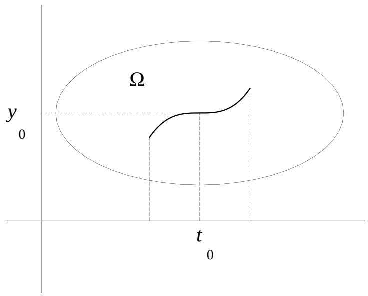
Jak již bylo řečeno v úvodu nelze obecně ani pro jednoduché rovnice vypočítat všechna jejich řešení. Je možné ale za poměrně slabých předpokladů o funkci f v (7.1') dokázat existenci a jednoznačnost řešení splňujícího tzv. *počáteční podmínky.* Zformulujme zde nyní tyto věty, jejichž důkaz čtenář může najít v literatuře, uvedené na konci skript.

Věta 7.1. *Nechť funkce f je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$, $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ je libovolný pevný bod v Ω. Potom existuje alespoň jedno řešení rovnice* (7.1') *v* Ω[2], *procházející tímto bodem, tj. existuje $\delta > 0$ a funkce $y(t)$ definovaná na intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, která na tomto intervalu řeší* (7.1') *v Ω a splňuje podmínky*

$$y^{(k)}(t_0) = y_k, \; k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.3}$$

Každé řešení rovnice (7.1') *lze prodloužit do maximálního v Ω (obecně ne jediným způsobem).*

Situace v případě $n = 1$ je nakreslena na obrázku 7.1.



Obr. 7.1

Poznámka 7.4. První tvrzení věty 7.1. se nazývá *lokální existenční větou.* Z druhého pak dostáváme, že každým bodem $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$ prochází aspoň jedno maximální (v Ω) řešení rovnice (7.1'). Poznamenejme, že definiční interval tohoto maximálního řešení může být obecně velmi malý – viz příklad 7.3. dále.

[2]Pozorný čtenář si jistě všiml, že bychom měli říkat v $\Omega \times \mathbb{R}$. Ale poslední množina nedává pro n-tou derivaci řešení žádná omezení, a proto píšeme pouze Ω. Pokud by chtěl, snadno si modifikuje příslušné definice pro rovnici (7.1) na případ rovnice (7.1').

Poznámka 7.5. Z věty o spojitosti složené funkce plyne, že řešení, jehož existenci tvrdí věta 7.1. má na intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ spojité derivace do řádu n včetně.

Poznámka 7.6. Jak ukazuje příklad 7.1. dále, spojitost funkce f ještě nezaručuje jednoznačnost řešení rovnice (7.1'), splňujícího podmínku (7.3). Aby jeho jednoznačnost byla zaručena, musí f splňovat další podmínky. Jednu z nich uvádí následující věta.

Věta 7.2. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.1. a funkce f splňuje navíc v Ω tzv. lokální Lipschitzovu podmínku podle posledních n proměnných: ke každému bodu $(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega$ existuje okolí U tohoto bodu a číslo K tak, že pro každé dva body $(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$, $(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})$ z U platí $|f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) - f(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})| < K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \tilde{y}_i|$. Potom řešení rovnice* (7.1') *splňující* (7.3) *je jediné v následujícím smyslu: dvě řešení splňující* (3) *jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů. Speciálně dvě maximální řešení splňující pro nějaké t_0 stejné podmínky* (3) *jsou si rovna identicky.*

Poznámka 7.7. Podmínka z věty 7.2. není nutná, existují slabší postačující podmínky jednoznačnosti. Viz cvičení 7.3.c) dále a například [Pe], [Ku].

Poznámka 7.8. Za předpokladů věty 7.2. tedy řešení rovnice (7.1') závisí na n parametrech – například na na hodnotách svých derivací do řádu $(n-1)$ včetně[3] v nějakém bodě t_0 a každé maximální řešení je jimi jednoznačně určeno.

7.3. Speciální typy rovnice $\mathbf{y' = f(t, y)}$

1. $y' = f(t)$.

Řešeními rovnice

$$y' = f(t) \tag{7.4}$$

na intervalu I jsou právě všechny primitivní funkce k f na I. Je-li f spojitá na intervalu I, pak podle vět 6.1. a 6.18. v [KI] existuje na I

[3]Značíme $f^{(0)} = f$ a mluvíme o nulté derivaci.