KAPITOLA 10

ČÍSELNÉ ŘADY

Tato kapitola bude po předcházející kapitole trochu odpočinková. Ale pozor na zrádnost takového přístupu.

Číselné řady jsou zobecněním součtu konečného počtu čísel na případ, kdy potřebujeme sečíst spočetně mnoho čísel – nějakou posloupnost čísel. Její součet se definuje jako limita posloupnosti tzv. *částečných součtů*. Některé vlastnosti se při tomto zobecnění zachovávají, jiné ne. Například obecně bude záležet na pořadí sčítání.

Použití řad je velmi široké. Uveďme alespoň přibližný výpočet čísel, rozklad funkcí do řad funkcí, které se zase úspěšně používají k řešení diferenciálních i jiných rovnic.

Číslem budeme dále rozumět reálné nebo komplexní číslo.

10.1. Definice a příklady

Definice 10.1. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde a_n jsou čísla nazýváme *číselnou řadou*, a_n jejím *n-tým členem*, $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i$ jejím *n-tým částečným součtem. Zbytkem po n-tém členu* této řady nazýváme řadu $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

Definice 10.2. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme *konvergentní*, jestliže existuje vlastní limita S posloupnosti jejích částečných součtů S_n. Tuto limitu pak nazýváme *součtem* této řady. Řadu, která nekonverguje nazýváme *divergentní*. Jsou-li všechna a_n reálná a posloupnost S_n má nevlastní limitu $+\infty$ $(-\infty)$, pak říkáme, že tato řada diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$ a má součet $+\infty$ $(-\infty)$. Jestliže posloupnost S_n nemá ani vlastní ani nevlastní limitu, říkáme, že řada *osciluje* a nemá žádný součet.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Pro řady s komlexními členy nedefinujeme v souladu s teorií limit posloupností komplexních čísel žádný "nevlastní" součet. Takové řady jsou konvergentní právě tehdy, jsou-li konvergentní řady z reálných částí a z imaginárních částí jejich členů. Součty těchto řad jsou reálnou resp. imaginární částí součtu původní řady komplexních čísel.

Základními úlohami jsou

1) najít součet, tj. sečíst řadu,

2) zjistit, zda řada je konvergentní nebo divergentní, resp. má součet či ne.

Příklad 10.1. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

se nazývá *geometrickou řadou* s prvním členem a_1 a *kvocientem* q. (Klademe zde $q^0 = 1$ pro každé q.) Taková řada je

1) konvergentní pro $|q| < 1$ a má součet $S = a_1/(1-q)$,

2) divergentní pro $a_1 \neq 0$ a $|q| \geq 1$,

3) divergentní k $+\infty$ $(-\infty)$ pro $a_1 > 0$ $(a_1 < 0)$ a $q \geq 1$,

4) oscilující pro $a_1 \neq 0$ a $q \leq -1$,

neboť platí

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1, \\ n a_1 & q = 1. \end{cases}$$

Vzoreček

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

si snadno zapamatujeme, když provedeme dělení polynomu $q^n - 1$ polynomem $q - 1$.

Příklad 10.2. Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + (n-1)d)$$

nazýváme *aritmetickou řadou* s prvním členem a_1 a *diferencí* d. Její částečný součet je dán vzorcem

$$S_n = n a_1 + d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = n a_1 + d \frac{n(n-1)}{2}.$$

Řada proto konverguje pouze pro $a_1 = d = 0$. Pro a_1 a d reálná a aspoň jedno z nich nenulové má součet $\pm\infty$ (rozeberte podrobně).

Příklad 10.3. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se nazývá *harmonickou řadou.* Ukažme, že má součet $+\infty$: protože její členy jsou kladné, je posloupnost jejích částečných součtů rostoucí a má tedy limitu. Protože je

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \\ \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}) \geq 1 + \frac{n}{2} \to \infty$$

(každá závorka je větší než $1/2$), má vybraná posloupnost z posloupnosti částečných součtů, a tedy i celá posloupnost částečných součtů limitu $+\infty$.

Příklad 10.4. Najděme součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Podle věty o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky (viz [KI], str. 144.) je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$$

a snadno se nahlédne, že $\alpha = 1$ a $\beta = -1$, tj.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Je proto

$$S_n = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Příklad 10.5. Ukažme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Protože členy této řady jsou kladné, je posloupnost S_n částečných součtů této řady rostoucí, a stačí proto ukázat, že posloupnost S_n je omezená. Protože pro $n \geq 2$ je

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)},$$

je pro $n \geq 2$ podle předchozího příkladu

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} =$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l(l+1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

10.2. Základní věty o řadách

Z vět o limitě posloupností dostaneme následující jednoduché věty o řadách:

Věta 10.1. (nezávislost konvergence resp. divergence na konečném počtu členů řady) *1. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak je konvergentní její zbytek po každém členu. Přitom dále platí: Označíme-li S součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, S_m její m-tý částečný součet a R_m součet jejího zbytku po m-tém členu, pak $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$ a $S = S_m + R_m$. 2. Je-li konvergentní zbytek řady po některém členu, pak je řada konvergentní. Analogicky pro divergentní řady resp. pro řady mající součet $\pm\infty$.*

Důkaz plyne z rovnosti

$$S_n^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} a_k = S_{m+n},$$

kde S_n je n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $S_n^{(m)}$ je n-tý částečný součet jejího zbytku po m-tém členu.

Věta 10.2. *Je-li λ nenulové číslo, pak jsou řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ buď obě konvergentní nebo obě divergentní. Je-li S součet první, je λS součet druhé.*

Důkaz plyne z rovností

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i, \ \sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda a_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Je-li $\lambda = 0$, jsou pro libovolnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ všechny členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ rovny nule a tato řada má zřejmě součet rovný nule.

Věta 10.3. *Jsou-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ a její součet je roven součtu součtů řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz plyne z věty o limitě součtu dvou posloupností.

Cvičení 10.1. Rozmyslete si, co se dá říct o součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, mohou-li být součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rovny $\pm\infty$.

Často užívaná je i následující věta:

Věta 10.4. (nutná podmínka konvergence) *Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Důkaz. Protože $a_n = S_n - S_{n-1}$ a posloupnosti S_n a S_{n-1} mají stejnou vlastní limitu, je podle věty o limitě součtu posloupností $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Pozor:</u> opačná implikace obecně neplatí – viz příklad 10.3. výše.
Tato věta se používá dvěma způsoby:

1) Zjistíme-li, že posloupnost a_n nemá limitu 0, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůže konvergovat. Například okamžitě máme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ nemůže