KAPITOLA 12

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

Posloupnost nebo *řada funkcí* je v jistém smyslu (nekonečný) soubor číselných posloupností nebo číselných řad, a proto se dají využít všechny poznatky, které již známe o číselných posloupnostech resp. číselných řadách. Na druhé straně soubory příslušných limit těchto číselných posloupností resp. součtů číselných řad vytvářejí tzv. *limitní funkci* resp. *funkci, rovnou součtu řady.* A vzniká přirozená otázka, zda se vlastnosti členů posloupnosti resp. řady, jako jsou existence limity, spojitost, derivovatelnost, integrovatelnost apod. zachovají i pro tuto limitní funkci resp. součet řady. Při vyjasňování této otázky hraje podstatnou úlohu pojem *stejnoměrné konvergence.*

Pro určitost budeme funkcí rozumět reálnou nebo komplexní funkci jedné nebo více reálných proměnných. Čtenář, který má tendenci k zobecňování, si snadno uvědomí, které věci lze přenést na obecnější objekty, uveďme například *vektorové funkce*, tj. zobrazení z $\mathbb{R}_r$ do $\mathbb{R}_s$, což jsou fakticky s-tice reálných funkcí.

12.1. Bodová a stejnoměrná konvergence

Definice 12.1. Řekneme, že posloupnost funkcí f_n konverguje *bodově na* M k funkci f, jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $f_n(x)$ konverguje k číslu $f(x)$. Píšeme pak

$$f_n \underset{M}{\to} f.$$

Řekneme, že řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konverguje *bodově* na M a má tam součet S, jestliže pro každé $x \in M$ posloupnost $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x)$ jejích částeč-

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX ných součtů konverguje k $S(x)$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \underset{M}{\to} S.$$

Příklad 12.1. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ bodově konverguje na $M = (-1, 1)$ (je to geometrická řada s kvocientem x a prvním členem x) a má tam součet $S(x) = x/(1-x)$. Pro $|x| \geq 1$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad 12.2. Posloupnost funkcí $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ bodově konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\pi/2 & x < 0. \end{cases}$$

Přesto, že f_n jsou na $\mathbb{R}$ spojité, limitní funkce není spojitá v bodě 0.

Zavedeme nyní slíbený pojem *stejnoměrné konvergence*:

Definice 12.2. Řekneme, že posloupnost funkcí f_n konverguje k funkci f *stejnoměrně na M* a píšeme

$$f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f,$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že pro $n > n_0(\varepsilon)$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pro } x \in M.$$

Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *konverguje stejnoměrně na M* k S, jestliže k S stejnoměrně na M konverguje posloupnost jejích částečných součtů. Píšeme pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \underset{M}{\rightrightarrows} S.$$

Poznámka 12.1. Někdy budeme vynechávat to, k čemu posloupnost konverguje resp. jaký součet má řada a říkat tedy posloupnost resp. řada bodově (stejnoměrně) konverguje na M a psát

$$f_n \underset{M}{\rightarrow}, \; f_n \underset{M}{\rightrightarrows}, \; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \underset{M}{\rightarrow}, \; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \underset{M}{\rightrightarrows} .$$

Rozmysleme si, čím se liší bodová konvergence od stejnoměrné konvergence.

1) Předně ze stejnoměrné konvergence plyne bodová konvergence (přesvědčete se podrobně).

2) Abychom pochopili, v čem je stejnoměrná konvergence něco víc než bodová, zapišme bodovou konvergenci pomocí ε a n_0:

$$\text{ke } \forall x \in M \text{ a ke } \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon), \text{ že pro } n > n_0(x, \varepsilon) \text{ je}$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

To znamená, že při bodové konvergenci může příslušné n_0 záviset i na x – pro různá x mohou být potřebná n_0 pro totéž ε různě velká, zatímco při stejnoměrné konvergenci musíme pro každé ε umět najít n_0, které se hodí pro všechna $x \in M$.

Příklad 12.3. Uvažme posloupnost funkcí

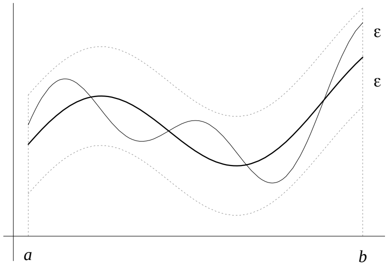
$$f_n(x) = \frac{1}{nx}, \; x \in M = \{x; \; x > 0\}.$$

Tato posloupnost zřejmě bodově na M konverguje k funkci f identicky rovné nule. Pro dané $x \in M$ nejmenší přípustné $n_0(x, \varepsilon)$ je $[1/x\varepsilon]$, kde $[\alpha]$ je celá část čísla α. Je ale

$$\sup_{x \in M} [1/x\varepsilon] = +\infty,$$

a tedy neexistuje žádné přirozené n_0, které by se pro dané ε hodilo pro všechna $x \in M$. Proto konvergence f_n není na M stejnoměrná.

Geometrický význam stejnoměrné konvergence si na obrázku můžeme znázornit takto: nakreslíme-li si okolo grafu limitní funkce f (na obrázku

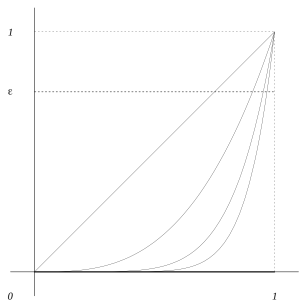


Obr. 12.1

tučně) pás šířky $\varepsilon > 0$, pak existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že grafy všech funkcí f_n s $n > n_0$ leží v tomto pásu.

Ukažme si ještě jeden příklad.

Příklad 12.4. Je-li $f_n(x) = x^n$, $x \in M = \langle 0, 1)$, pak f_n bodově na M konverguje k identicky nulové funkci. Jak je vidět z obrázku 12.2, pro $\varepsilon < 1$ z ε-ového pásu „vyleze" dokonce každá funkce.



Obr. 12.2

Cvičení 12.1. Nechť $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$. Jsou-li všechny f_n na M omezené, je také f na M omezená. Dokažte.

12.2. Jak zjišťovat stejnoměrnou konvergenci

A) Pro posloupnosti.

Věta 12.1. *Nechť* $f_n \underset{M}{\to} f$ *a*

$$\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_M |f_n(x) - f(x)|.$$

Potom

$$f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \sigma_n \to 0.$$

Důkaz. Jestliže $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ pro $n > n_0$ a každé $x \in M$. Potom ale $\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_M |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pro $n > n_0$, tj. $\sigma_n \to 0$. Nechť naopak $\sigma_n \to 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ je

$$\varepsilon > \sigma_n = \sup_M |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)|$$

pro každé $x \in M$, cbd.

Jaký praktický postup nám z této věty plyne:
1) Najdeme bodovou limitu f posloupnosti f_n.
2) Určíme σ_n.
3) Určíme $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$.

Je-li určení σ_n obtížné, podaří se někdy najít $\tilde{\sigma}_n \geq \sigma_n$, splňující $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n \to 0$ (pak máme stejnoměrnou konvergenci), nebo naopak takové $\hat{\sigma}_n \leq \sigma_n$, že $\hat{\sigma}_n$ nemá limitu nula (pak konvergence není stejnoměrná).

Příklad 12.5. Uvažme posloupnost

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \ x \in \langle 0, +\infty).$$

Bodová limita je zřejmě 0 na $M = \langle 0, +\infty)$ (ověřte podrobně). Určeme σ_n. f_n je na M spojitá, rovná 0 v nule a má limitu 0 pro $x \to +\infty$. Dále je

$$f_n'(x) = \frac{n(1 + n^2x^2) - nxn^2 2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2},$$