KAPITOLA 16

FOURIEROVY ŘADY

16.1. Úvod

Vedle rozkladů funkcí do mocninných řad, tj. podle systému funkcí $\{x^n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, se často výhodně používají rozklady podle jiných systémů, například podle trigonometrického systému

$$1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N},$$

tj. funkci f budeme chtít rozvinout do řady tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

(a_n, b_n jsou čísla), která se nazývá *Fourierovou řadou* této funkce.

Ukažme si jedno použití těchto řad.

Příklad 16.1. Příčné kmity struny délky π jsou popsány parciální diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x \in \langle 0, \pi \rangle, \tag{16.1}$$

kde $u(t,x)$ je malá výchylka struny od rovnovážné polohy v bodě x a čase t a a je kladná konstanta, závisející na fyzikálních vlastnostech struny (viz například [TS]). K určení kmitů struny je ještě třeba zadat počáteční polohu a počáteční rychlost struny (tzv. počáteční podmínky)

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi_0(x),\ x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ u_t(0,x) &= \varphi_1(x),\ x \in \langle 0, \pi \rangle, \end{aligned} \tag{16.2}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX kde φ_0 a φ_1 jsou zadané funkce, a také podmínky na koncích struny (okrajové podmínky), například

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \; t > 0 \tag{16.3}$$

(konce struny upevněné), nebo

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \; t > 0 \tag{16.3'}$$

(konce struny volné).

Budeme hledat řešení rovnice (16.1) například s podmínkami (16.2), (16.3) tzv. *Fourierovou metodou* neboli *metodou separace proměnných.* Nejdříve hledáme netriviální (tj. různé od identické nuly) řešení (16.1), (16.3), které má tvar $u(t,x) = T(t)X(x)$. Po dosazení do (16.1) a vydělení výrazem $a^2T(t)X(x)$ dostaneme

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \; t > 0, \; x \in \langle 0,\pi\rangle,$$

což znamená, že oba zlomky musí být rovny konstantní funkci – označme ji $-\lambda$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ dostáváme tedy řešení

$$X_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha\cos\sqrt{\lambda}x + \beta\sin\sqrt{\lambda}x & \text{pro } \lambda > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{pro } \lambda = 0, \\ \alpha e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \beta e^{-\sqrt{|\lambda|}x} & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases}$$

kde α, β jsou libovolná čísla. Pro $\lambda \le 0$ funkce X_λ splňuje (16.3) jen pro $\alpha = \beta = 0$, neboť vynásobíme-li X_λ rovnost $X''_\lambda + \lambda X_\lambda = 0$ (určující X_λ) a integrujeme vzniklou rovnost přes interval $\langle 0,\pi\rangle$, dostaneme integrací per partes s uvážením (16.3)

$$\int_0^\pi ((X'_\lambda)^2 - \lambda X_\lambda^2)\,dx = 0.$$

Protože je $\lambda \le 0$, musí být oba sčítance v integrandu identicky rovné nule. Je proto X_λ rovné konstantě a ta v důsledku (16.3) je rovná 0. Pro $\lambda > 0$ z podmínky (16.3) plyne $\alpha = 0$ a $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, což dává $\lambda = n^2$ s $n \in \mathbb{N}$. Dostáváme tedy posloupnost $\sin nx$, jí odpovídající posloupnost

$\alpha_n \cos ant + \beta_n \sin ant$, a tedy posloupnost $(\alpha_n \cos ant + \beta_n \sin ant) \sin nx$ řešení rovnice (16.1) uvedeného tvaru, která splňují podmínku (16.3).

Nyní se můžeme pokusit najít řešení úlohy (16.1),(16.2), (16.3) ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos ant + \beta_n \sin ant) \sin nx, \tag{16.4}$$

kde α_n, β_n jsou čísla. Jestliže taková řada konverguje a lze ji dvakrát derivovat po členech, potom její součet je také řešením rovnice (16.1), které splňuje okrajové podmínky (16.3). Zbývá určit čísla α_n a β_n tak, aby byly splněny i počáteční podmínky (16.2), tj. aby platilo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx = \varphi_0(x), \ \sum_{n=1}^{\infty} an\beta_n \sin nx = \varphi_1(x).$$

To ovšem vede na problém, zda funkce φ_0 a φ_1 lze rozložit do řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} an\beta_n \sin nx$ a na vyjasnění „kvality konvergence" těchto řad, abychom opravdu mohli řadu (16.4) derivovat po členech.

Protože úvahy, které při vyjasňování těchto otázek vznikají, lze snadno zobecnit na obecnější (a potřebné) systémy funkcí, než je uvedený trigonometrický systém, vyložíme ve druhé části této kapitoly elegantní teorii Fourierových řad podle tzv. *ortogonálních systémů v Hilbertově prostoru*, která tento trigonometrický systém zahrnuje jako speciální případ.

V první části, která obsahuje klasické Fourierovy řady podle trigonometrického systému $1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}$, bude výklad ve srovnání se skripty [K4] méně obecný, zato snad jednodušší.

16.2. Fourierovy řady podle trigonometrického systému

Naším cílem bude vyjasnění podmínek na funkci f, definovanou na intervalu $(-\pi, \pi)$, které zaručí, že ji lze rozvinout do řady tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{16.5}$$

kde a_n, b_n jsou obecně komplexní čísla a také vyjasnění charakteru konvergence takové řady: zda konverguje stejnoměrně, zda ji lze derivovat resp. integrovat po členech, apod.

Označíme-li

$$s_0(x) = \frac{a_0}{2}, \; s_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \; p \in \mathbb{N},$$

částečný součet řady (16.5), pak v důsledku známých vzorců ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i \sin\alpha, \\ \cos\alpha &= (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 = \operatorname{Re} e^{i\alpha}, \\ \sin\alpha &= (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i = \operatorname{Im} e^{i\alpha} \end{aligned}$$

tento částečný součet můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{inx}, \; p \in \mathbb{N}_0,$$

s

(16.6) $$c_0 = a_0/2, \; c_n = (a_n - ib_n)/2, \; c_{-n} = (a_n + ib_n)/2, \; n \in \mathbb{N},$$

neboli ekvivalentně

$$a_0 = 2c_0, \; a_n = c_n + c_{-n}, \; b_n = i(c_n - c_{-n}), \; n \in \mathbb{N}$$

(ověřte podrobně). Řadu (16.5) proto můžeme formálně zapsat ve tvaru řady

(16.5') $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

s takto určenými c_n. Považujeme-li za její součet limitu pro $p \to +\infty$ výrazů

$$\tilde{s}_p(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{inx}, \; p \in \mathbb{N}_0,$$

pro které platí

$$s_p(x) = \tilde{s}_p(x),\ p \in \mathbb{N}_0, \tag{16.7}$$

je jedno, který tvar, zda (16.5) či (16.5'), resp. který ze systémů

$$1,\ \cos nx,\ \sin nx,\ n \in \mathbb{N}, \tag{16.8}$$

či

$$e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{16.8'}$$

používáme. V teoretických úvahách je přehlednější práce s (16.5') (viz například důkaz věty 16.2. dále), v konkrétních příkladech budeme užívat i (16.5). Zápis (16.5') je také výhodnější z hlediska přechodu k Fourierově transformaci (viz kapitola 19).

Základní vlastností systémů (16.8) a (16.8') je jejich *ortogonalita* v prostoru $L_2(-\pi, \pi)$:

$$\begin{gathered}(1, \cos nx) = (1, \sin nx) = 0,\ n \in \mathbb{N}\\ (\cos nx, \cos mx) = (\sin nx, \sin mx) = 0,\ n \neq m,\ n, m \in \mathbb{N},\\ (\cos nx, \sin mx) = 0, n, m \in \mathbb{N},\end{gathered} \tag{16.9}$$

$$(e^{inx}, e^{imx}) = 0,\ n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq m, \tag{16.9'}$$

kde (f, g) značíme skalární součin v komplexním prostoru $L_2(-\pi, \pi)$, tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Dále platí

$$\begin{gathered}(1, 1) = 2\pi,\\ (\cos nx, \cos nx) = (\sin nx, \sin nx) = \pi,\ n \in \mathbb{N},\end{gathered} \tag{16.10}$$

$$(e^{inx}, e^{inx}) = 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{16.10'}$$