KAPITOLA 18

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Fourierova transformace, jakož i jiné integrální transformace (Laplaceova, Hankelova, Mellinova aj.) mají velké použití jak v matematice, tak ve fyzice. V matematice zejména při řešení diferenciálních rovnic (obyčejných a zvláště parciálních). Ve fyzice například v kvantové mechanice: má-li funkce f význam vlnové funkce částice, pak její Fourierova transformace $\hat{f}$ se nazývá vlnovou funkcí v impulsové reprezentaci, $|f(x)|^2$ a $|\hat{f}(x)|^2$ mají význam hustoty pravděpodobnostního rozložení souřadnice částice resp. jejího impulsu.

Metody teorie funkcí komplexní proměnné se velmi dobře dají použít k výpočtu těchto transformací i transformací k nim inverzních.

Protože Fourierova transformace i reálné funkce bude obecně komplexní funkcí, budeme v této kapitole jako pravidlo uvažovat komplexní funkce. Pruh nad komplexním číslem bude značit číslo k němu komplexně sdružené, pruh nad funkcí f, tj. $\bar{f}$, značí funkci, jejíž hodnoty jsou komplexně sdružemě k hodnotám f, tj. $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

Budeme také používat označení

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx \text{ pro } \int\limits_{\Omega} f\,dm_r,\ \Omega \subset \mathbb{R}_r.$$

18.1. Definice a příklady

Definice 18.1. Pro komplexní funkci $f \in L_1(\mathbb{R}_r)$ definujeme její Fourierovu transformaci $\mathcal{F}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \overset{\text{def}}{=} \hat{f}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-i2\pi(x,\xi)} f(x)\,dx,\ \xi \in \mathbb{R}_r$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

a opačnou Fourierovu transformaci $\mathcal{F}_{-1}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}_{-1}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \check{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{i2\pi(x,\xi)} f(x)\,dx, \ \xi \in \mathbb{R}_r,$$

kde pro $x \in \mathbb{R}_r$, $y \in \mathbb{R}_r$ je $(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{r} x_j y_j$ skalární součin v $\mathbb{R}_r$.

Používají se i jiné varianty Fourierovy transformace, které je možné jednotně charakterizovat třemi číselnými parametry $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takto:

Definice 18.1a. Pro komplexní funkci $f \in L_1(\mathbb{R}_r)$ definujeme její Fourierovu transformaci $\mathcal{F}^{(A,B,k)}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}^{(A,B,k)}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} A^r \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(x,\xi)} f(x)\,dx, \ \xi \in \mathbb{R}_r$$

a opačnou Fourierovu transformaci $\mathcal{F}_{-1}^{(A,B,k)}f$ předpisem

$$(\mathcal{F}_{-1}^{(A,B,k)}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} B^r \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{ik(x,\xi)} f(x)\,dx, \ \xi \in \mathbb{R}_r,$$

kde čísla $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jsou vázána vztahem

$$AB = |k|/2\pi. \tag{18.1}$$

Vztah (18.1) pak zaručuje platnost následující fundamentální věty, nazývané *věta o inverzi*: za jistých předpokladů o funkci f je (viz dále)

$$\mathcal{F}_{-1}^{(A,B,k)} \mathcal{F}^{(A,B,k)} f = \mathcal{F}^{(A,B,k)} \mathcal{F}_{-1}^{(A,B,k)} f = f.$$

Kromě případu z definice 18.1, v němž je $A = B = 1$, $k = 2\pi$ se nejčastěji užívají případy $A = 1$, $B = 1/(2\pi)$, $k = 1$:

$$\mathcal{F}f = \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-i(x,\xi)} f(x)\,dx, \ \mathcal{F}_{-1}f = (2\pi)^{-r} \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{i(x,\xi)} f(x)\,dx,$$

a $A = B = (2\pi)^{-1/2}$, $k = 1$:

$$\mathcal{F}f = (2\pi)^{-r/2} \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx, \ \mathcal{F}_{-1}f = (2\pi)^{-r/2} \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{i(x,\xi)} f(x)\, dx,$$

a případy, které z těchto dostaneme záměnou k na $-k$, což vede k záměně úlohy přímé a opačné transformace.

Pokud explicitně neuvedeme parametry zvolené Fourierovy transformace, budeme vždy mít na mysli označení z definice 18.1.

Příklad 18.1. Nechť f je charakteristická funkce omezeného intervalu s koncovými body a, b, $-\infty < a < b < +\infty$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (a, b), \\ 0 & \text{pro } x \text{ vně } \langle a, b \rangle. \end{cases}$$

Pak je

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_a^b e^{-i2\pi x\xi}\, dx = \begin{cases} b - a & \text{pro } \xi = 0, \\ \frac{e^{-i2\pi a\xi} - e^{-i2\pi b\xi}}{i2\pi\xi} & \text{pro } \xi \neq 0, \end{cases}$$

což speciálně pro $a = -l$, $b = l$, $l > 0$ dává

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2l & \text{pro } \xi = 0, \\ \frac{\sin 2\pi l\xi}{\pi\xi} & \text{pro } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Ukažte za cvičení, že toto $\hat{f}$ není z $L_1(\mathbb{R})$ (použijte odhad $|\sin x| \geq 1/2$ pro $x \in \langle (j + 1/6)\pi, (j + 5/6)\pi \rangle$, $j \in \mathbb{Z}$).

Příklad 18.2. Je pro $\lambda > 0$

$$\mathcal{F}(e^{-\lambda(x,x)})(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-i2\pi(x,\xi)} e^{-\lambda(x,x)}\, dx = (\pi/\lambda)^{r/2} e^{-\pi^2(\xi,\xi)/\lambda}, \ \xi \in \mathbb{R}_r,$$

speciálně

$$\mathcal{F}(e^{-\pi(x,x)})(\xi) = e^{-\pi(\xi,\xi)}$$

– viz příklad 17.13. a zřejmá rovnost

$$\int\limits_{\mathbb{R}_r} e^{-i2\pi(x,\xi)} e^{-\lambda(x,x)}\, dx = \prod_{j=1}^{r} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi(x_j,\xi_j)} e^{-\lambda x_j^2}\, dx_j.$$

Stojí za to si uvědomit, jak vypadají Fourierovy transformace funkce sudé, liché resp. radiální (tj. závisející jen na vzdálenosti od počátku).

Lemma 18.1. *Je-li $f \in L_1(\mathbb{R}_r)$ sudá (lichá) v proměnné x_j, pak je její Fourierova transformace sudá (lichá) v proměnné ξ_j. Speciálně pro $r = 1$ je*

$$(\mathcal{F}^{(A,B,k)} f)(\xi) = \begin{cases} 2A \int\limits_0^{+\infty} \cos(kx\xi) f(x)\,dx & \textit{pro } f \textit{ sudou}, \\ -2iA \int\limits_0^{+\infty} \sin(kx\xi) f(x)\,dx & \textit{pro } f \textit{ lichou}. \end{cases}$$

Důkaz. Uvažme nejdříve případ $r = 1$. Pro f sudou máme

$$\hat{f}(\xi) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\xi} f(x)\,dx = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos(kx\xi) - i\sin(kx\xi)) f(x)\,dx =$$

$$= A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx\xi) f(x)\,dx = 2A \int\limits_{0}^{+\infty} \cos(kx\xi) f(x)\,dx.$$

(Integrál ze $\sin(kx\xi)f(x)$ je roven nule díky lichosti integrandu.) V případě $r > 1$ musíme ještě užít Fubiniovu větu. Pro jednoduchost zápisu si to ukažme pro $r = 2$ s proměnnými x, y resp. ξ, η a f sudé v proměnné x:

$$\hat{f}(\xi, \eta) = A \int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{-ik(x\xi + y\eta)} f(x, y)\,dxdy =$$

$$= A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky\eta} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\xi} f(x, y)\,dx \Big)\,dy =$$

$$= A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky\eta} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\cos(ikx\xi) - i\sin(kx\xi)) f(x, y)\,dx \Big)\,dy =$$

$$= 2A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iky\eta} \Big(\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(kx\xi) f(x, y)\,dx \Big)\,dy.$$

Pro f lichou je důkaz analogický.

Cvičení 18.1. Dokažte první část lemmatu 18.1. pomocí věty o substituci: přejděte k proměnným $y_k = x_k$, $k \neq j$, $y_j = -x_j$.

V následujícím lemmatu i dále budeme pro jednoduchost značit pro $x \in \mathbb{R}_r$ $|x| \stackrel{\text{def}}{=} (x,x)^{1/2}$.

Lemma 18.1a. *Je-li $f \in L_1(\mathbb{R}_r)$ radiální, je taková i její Fourierova transformace. Je-li $f(x) = g(|x|)$, pak se $\hat{f}$ dá vyjádřit pomocí jednorozměrného integrálu. Toto vyjádření má pro $r = 3$ a Fourierovu transformaci z definice 18.1. tvar*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^{+\infty} g(\rho)\rho \sin(2\pi\rho|\xi|)\, d\rho, \ \ |\xi| \neq 0.$$

(Pro $r \neq 3$ obsahuje integrand příslušného integrálu tzv. Besselovy funkce.)

Důkaz. K danému $\xi \neq 0$ existuje ortogonální matice C, pro kterou je $C\xi = \tilde{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} (0,0,\dots,0,|\xi|)^T$ (zkonstruujte si ji za cvičení). Potom je

$$\int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(x,\xi)} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(x,C^{-1}\tilde{\xi})} g(|x|)\, dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(x,C^T\tilde{\xi})} g(|x|)\, dx = \int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(Cx,\tilde{\xi})} g(|x|)\, dx.$$

Substitucí $y = Cx$ (je $|Cx| = |x| = |y|$, $|\det C| = 1$) pak dostáváme, že je to rovno

$$\int_{\mathbb{R}_r} e^{-ik(y,\tilde{\xi})} g(|y|)\, dy = \int_{\mathbb{R}_r} e^{-iky_r|\xi|} g(|y|)\, dy.$$

Druhé tvrzení dokážeme pouze pro $r = 3$. V posledně napsaném integrálu (s $k = 2\pi$) přejdeme ke sférickým souřadnicím $y_1 = \rho \cos\vartheta \cos\varphi$, $y_2 = \rho \cos\vartheta \sin\varphi$, $y_3 = \rho \sin\vartheta$, $\rho \in (0,+\infty)$, $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$