1 Matematický úvod

Pro zkrácení zápisu zavedeme některé symboly.

E_m euklidovský m-rozměrný prostor; písmeno m budeme průběžně rezervovat pro dimenzi prostoru, v němž budeme pracovat;

$\mathscr{S} = \mathscr{S}(E_m)$ Schwarzův prostor funkcí rychle klesajících v nekonečnu;

$\big(f(x)\big)_M$ značí funkci, která je pro $x \in M$ rovná $f(x)$ a pro ostatní x je identicky nulová, speciálně pro $M = \{x \,|\, x > 0\}$ značíme $\big(f(x)\big)_M = \big(f(x)\big)_{x>0}$;

$\big(f(x)\big)_+$ kladná část z f, tedy funkce rovná f pro ta x, kde $f(x) > 0$, a rovná nule všude jinde;

$\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(E_m)$ prostor funkcí, které jsou lokálně integrovatelné na E_m v Lebesgueově smyslu, tj. takových funkcí, že pro každý bod $x \in E_m$ existuje okolí $U(x)$, na němž je jejich integrál konečný;

$C^k(E_m)$, $C^\infty(E_m)$ množina všech k-krát, resp. nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na E_m;

$p = (p_1, \dots, p_m),\ \sum p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^m p_i,\ p_i \in \mathbb{N}_0$ multiindex a jeho řád;

$D^p\varphi = \partial^{\Sigma p}\varphi / \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}$ derivace funkce φ (indukovaná multiindexem p);

$\partial_{ij}u$, $\partial_{xy}u$ zkrácené značení pro parciální derivaci u podle x_i a x_j, resp. podle x a y; je-li to vhodné, zkracujeme ještě více: u_{ij}, u_{xy};

$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in E_m : x^p = x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}$ mocnina x řádu $\sum p$; polynom v x konstruujeme jako lineární kombinaci mocnin x, tzn. $P(x) = \sum_{p,\, \Sigma p \le k} \alpha_p x^p$;

$|x|^2 = x^2 = x \cdot x = \sum_i x_i^2$ čtverec normy x;

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ hyperbolické funkce;

χ_M charakteristická funkce množiny M; $\chi_M(x) = 1$, pokud x leží v množině M, jinak $\chi_M(x) = 0$;

$\mathbb{I}$ jednotková matice;

$T_{(x_i)}$ x_i označuje proměnnou, jejímž prostřednictvím distribuce T působí na testovací funkci;

s.v. skoro všude, skoro všechna.

§1. Integrály v komplexním oboru

Jen krátce připomeňme některé podstatné poznatky související s reziduovou větou (viz [23]). Uvažovali jsme funkce komplexní proměnné, které byly holomorfní například na $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$, přičemž A obsahovala konečně mnoho bodů, v nichž měla daná funkce *izolované singularity*. Integrál této funkce přes uzavřenou křivku v Ω byl roven nule, pokud uvnitř křivky neležela žádná singularita, v opačném případě byl roven $2\pi i$-násobku součtu reziduí ve všech singularitách obsažených uvnitř křivky. *Reziduum* v bodě $a \in \mathbb{C}$ byl koeficient u členu $(z-a)^{-1}$ v Laurentově řadě, do níž lze rozvinout libovolnou funkci, která je holomorfní na nějakém redukovaném okolí tohoto bodu.

Pro výpočet reziduí bylo důležité, jakého charakteru byla izolovaná singularita. V nejužívanějším případě pólu šlo o to, zda pól byl násobnosti jedna (tj. existovala vlastní a nenulová $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)$, tedy funkce se v okolí a chovala jako $1/(z-a)$), či násobnosti vyšší, obecně n (tj. existovala vlastní a nenulová $\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^n$, funkce se chovala jako $1/(z-a)^n$). V prvním případě jsme používali například vzorec

$$\operatorname{res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=a} , \qquad \text{je-li } g(a)=0,\ g'(a)\neq 0 \text{ a } f \text{ holomorfní v } a, \tag{1.1}$$

ve druhém případě, měla-li f v a pól násobnosti n,

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \big[(z-a)^n f(z)\big]^{(n-1)} . \tag{1.2}$$

Při výpočtech pomocí reziduové věty jsme integrovali přes různé křivky, které jsme pak limitně „natahovali do nekonečna“, a využívali jsme skutečnosti, že příspěvky od některých částí budou v limitě nulové. Připomeňme si i znění lemmatu o obcházení pólů násobnosti jedna. Integrujme přes oblouk kružnice konečného poloměru $\varrho > 0$ o středu $a \in \mathbb{C}$ parametrizovaný $\varphi_\varrho = a + \varrho\,\mathrm{e}^{it}, t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Nechť f má izolovanou singularitu v bodě a (tj. existuje jeho prstencové okolí, kde je funkce holomorfní), a to typu jednonásobného pólu (!), potom (viz [23])

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int_{\varphi_\varrho} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\beta - \alpha)\,\mathrm{res}_a\, f(z)\ .$$

§2. Funkce gama a beta

Funkce gama je funkce komplexní proměnné definovaná pomocí integrálu

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{nebo} \quad \Gamma(p) = 2\int_0^\infty \tau^{2p-1}\mathrm{e}^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1.3)$$

pro $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > 0$; oba výrazy se rovnají díky substituci $t = \tau^2$. S touto funkcí souvisí několik základních vztahů

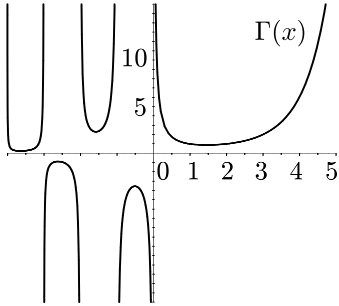
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0:\ z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)\,, \quad \Gamma(1) = 1\,, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ .$$

První z nich dostaneme celkem jednoduchým způsobem pomocí metody per partes, druhý přímo z definice a poslední vztah odvodíme z $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{\pi}$. Indukcí potom snadno dokážeme pro $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_n \sqrt{\pi}\ , \qquad (1.4)$$

připomínáme označení $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ pro $\alpha \in \mathbb{C}$. Funkci gama lze holomorfně rozšířit na množinu $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ takto: pro $\mathrm{Re}\, z > 0$ dostáváme z (1.3) indukcí $z(z+1)\ldots(z+n)\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1)$. Funkce na pravé straně této rovnosti je holomorfní pro $\mathrm{Re}\, z > -n-1$, a tedy podle věty o jednoznačnosti holomorfních funkcí [23] i funkce na levé straně může být na tuto množinu holomorfně rozšířena. Po vydělení pak dostáváme

$$\Gamma(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad \text{pro } \mathrm{Re}\, z > -n-1\,, \quad z \neq 0, 1, \ldots, -n\ .$$



Obr. 1: Gama funkce.

Tuto úvahu lze však provést pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, čímž je celé rozšíření provedeno. Z uvedeného vzorce je navíc vidět, že v bodech $0, -1, -2, \ldots$ jsou jednoduché póly. Reziduum v bodě $-n$ můžeme spočíst například pomocí vzorce (1.1), kde klademe $g(z) = (z+n)$,

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \cdot \frac{1}{(z+n)'}\bigg|_{z=-n} = \frac{(-1)^n}{n\,!} \; .$$

Graf gama funkce pro reálné hodnoty z ukazuje obr. 1.

Uvažujme nyní čísla p, $q > 0$ a počítejme hodnotu součinu $\Gamma(p)\Gamma(q)$ s odvoláním na Fubiniho větu [22] a posléze s pomocí přechodu do polárních souřadnic $\tau_1 = r\cos\varphi$, $\tau_2 = r\sin\varphi$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty \tau_1^{2p-1} \mathrm{e}^{-\tau_1^2}\,\mathrm{d}\tau_1 \int_0^\infty \tau_2^{2q-1}\mathrm{e}^{-\tau_2^2}\,\mathrm{d}\tau_2 = \\
&= 4 \iint\limits_{\tau_1,\tau_2 \geq 0} \tau_1^{2p-1}\tau_2^{2q-1}\mathrm{e}^{-\tau_1^2-\tau_2^2}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 = \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, r^{2(p+q)-2}\mathrm{e}^{-r^2} \cdot 2\big(\cos\varphi\big)^{2p-1}\big(\sin\varphi\big)^{2q-1} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \\
&= 2\,\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos\varphi\big)^{2p-1}\big(\sin\varphi\big)^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi \; .
\end{aligned}$$

Hodnotou posledního integrálu definujeme *funkci beta* v bodě (p,q), platí tedy vztah

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\big(\cos\varphi\big)^{2p-1}\big(\sin\varphi\big)^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi\ . \tag{1.5}$$

Z vyjádření pomocí gama funkcí vidíme, že funkce beta je invariantní vůči záměně proměnných, tedy že pro libovolná p, $q>0$ je $\mathrm{B}(p,q)=$ $=\mathrm{B}(q,p)$. Různými substitucemi můžeme integrál (1.5) převádět na další tvary.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\big(\cos\varphi\big)^{2p-1}\big(\sin\varphi\big)^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,\mathrm{d}t=\\&=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^\infty\frac{\varrho^{2p-1}}{(1+\varrho^2)^{p+q}}\,\mathrm{d}\varrho\ .\end{aligned}\tag{1.6}$$

Použili jsme po řadě substitucí $t=\sin^2\varphi$, $t=\frac{1}{1+x}$ a $x=\varrho^2$. Povšimněme si, že pouze u integrálu v proměnné t je ihned patrná invariance vůči záměně p a q. Pro obecná p, $q>0$ je vyčíslování uvedených integrálů obtížné a jejich vyjádření pomocí funkce gama nám může usnadnit práci.

Funkci beta lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí jen v některých speciálních případech, viz následující příklad.

Příklad 1.1: Pro $s\in(0;1)$ vypočítejme hodnotu $\mathrm{B}(s,1-s)$.

Použijeme integrální vyjádření funkce beta, které vznikne po substituci $x=\mathrm{e}^z$ do třetího z tvarů v (1.6). Označíme-li funkci komplexní proměnné z s parametrem s

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{sz}}{1+\mathrm{e}^z}\,,\quad \text{pak } \mathrm{B}(s,1-s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Čtenář již tuší, že výpočet provedeme pomocí reziduové věty: protože e^z je v imaginární části z periodická s periodou 2π, volíme za integrační křivku φ obvod obdélníka:

$$\begin{aligned}&\varphi_1:\quad z=t\,,\ t\in\langle -R;R\rangle\,, &&\varphi_3:\quad z=t+2\pi i\,,\ t\in\langle -R;R\rangle\,,\\&\varphi_2:\quad z=R+it\,,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle\,, &&\varphi_4:\quad z=-R+it\,,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle\,,\end{aligned}$$
$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4\ .$$