5 Speciální polynomy a lineární diferenciální rovnice

5.1 Jak to vidí matematik

Speciální polynomy (například Laguerrovy, Legendreovy, Hermitovy aj.) jsou *posloupnosti* polynomů, které se dají zavést různými způsoby; například (viz [23]) ortogonalizací systému funkcí $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru $\mathscr{L}^2_\varrho\big((a;b)\big)$, jeho definici viz o dvě strany dále. My použijeme (s výjimkou Hermitových polynomů) následující schéma:

1. Najdeme řešení Gaussovy, resp. redukované Gaussovy, rovnice ve tvaru mocninné řady — hypergeometrickou, resp. redukovanou hypergeometrickou, funkci. Určíme ty parametry těchto rovnic, pro něž se příslušná hypergeometrická funkce redukuje na polynom. Dostaneme posloupnost polynomů stupně $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Převedeme Gaussovu (resp. redukovanou Gaussovu) rovnici na samoadjungovaný tvar: $-\big(p(x)y_n'(x)\big)' = \lambda_n \varrho(x) y_n(x)$, odkud odvodíme, že pro různá λ_n jsou příslušné polynomy ortogonální v prostoru $\mathscr{L}^2_\varrho\big((a;b)\big)$ (s váhou ϱ) a pomocí Stoneovy–Weierstrassovy věty (či jinak) ukážeme, že systém $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný v $\mathscr{L}^2_\varrho\big((a;b)\big)$.

3. Odvodíme rekurentní formule pro posloupnosti těchto polynomů.

4. Odvodíme vytvořující funkce pro tyto posloupnosti.

Připomeňme ještě, že úloha na vlastní čísla odpovídající diferenciálnímu výrazu $\ell(y) = -(py')'$ zahrnuje ještě i okrajové podmínky na funkci y, které musí zaručit, že $\int_a^b \ell(y)\overline{z}\,\mathrm{d}x = \int_a^b y\,\overline{\ell(z)}\,\mathrm{d}x$, tedy že se při integraci per partes anulují členy $[py'z]_a^b$ a $[pyz']_a^b$. Tyto podmínky se někdy nahrazují požadavkem[62], aby $y \in \mathscr{L}^2_\varrho$. Právě tyto podmínky zaručí, že množina vlastních čísel bude tvořit posloupnost s limitou $+\infty$ či $-\infty$.

[62] Na neomezeném intervalu to v praxi obvykle odpovídá nejvýše polynomiálnímu růstu, tj. řešení nesmí být součet „skutečně nekonečné“ řady. Viz Liouvilleovu větu.

Ve fyzice se tyto polynomy užívají jednak při řešení úloh pro parciální diferenciální rovnice metodou separace proměnných (abychom mohli danou funkci rozložit do Fourierovy řady podle systému ortogonálních polynomů) a také pro určení všech vlastních čísel a funkcí některých hermitovských (samoadjungovaných) operátorů. Aplikacím v optice, kvantové mechanice či elektromagnetismu je věnován samostatný paragraf.

Dříve, než se zaměříme na obecnější teorii řešení lineárních diferenciálních rovnic pomocí zobecněných mocninných (pseudopotenčních) řad, ukážeme na příkladu redukované Gaussovy rovnice, jaké výsledky můžeme v této kapitole očekávat.

§1. Redukovaná Gaussova rovnice : Laguerrovy polynomy

Redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0\,, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}\,, \ \gamma \neq 0, -1, -2, \dots \tag{5.1}$$

Řešení nalezneme ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Dosazením do (5.1) a porovnáním koeficientů u x^{n-1} dostaneme

$$c_n\big(n(n-1) + \gamma n\big) - c_{n-1}(n-1) - \alpha c_{n-1} = 0\,,$$
$$c_n = c_{n-1}\frac{\alpha + n - 1}{n(\gamma + n - 1)} = \dots = \frac{(\alpha)_n}{n!\,(\gamma)_n}\,,\ n = 0,\,1,\,2,\dots$$

při počáteční podmínce $y(0) = c_0 = 1$ (značíme $(\alpha)_0 = 1$ a $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$). Konvergenci řady pro každé $x \in \mathbb{C}$ ověříme snadno podílovým kritériem: $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n-1}| = 0$. Poloměr konvergence řady je tedy $+\infty$ a řada reprezentuje funkci holomorfní v celém $\mathbb{C}$. Nalezené řešení nazýváme *redukovaná hypergeometrická funkce*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!\,(\gamma)_n}\,x^n \overset{\text{df}}{=} F(\alpha, \gamma, x)\,. \tag{5.2}$$

Všimněme si, že $F(\alpha, \gamma, x)$ je polynom stupně n ($n \in \mathbb{N}_0$), právě když $\alpha = -n$: pro $k > n$ pak totiž součin $(\alpha)_k$ obsahuje nulu. Ze stejného důvodu je třeba, aby γ nebylo nekladné celé číslo.

Od redukovaných hypergeometrických funkcí lze snadno přejít například k *Laguerrovým polynomům.* Položíme-li $\gamma = s+1$, $s > -1$, a $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, bude řešením Gaussovy redukované rovnice

$$xy'' + (s+1-x)y' + ny = 0\,, \quad s > -1\,,\ n = 0,\,1,\,2,\dots \tag{5.3}$$

polynom $F(-n, s+1, x) \overset{\text{df}}{=} y_n(x)$. Ukážeme, že tyto polynomy jsou řešením diferenciální rovnice tvaru

$$-(py')' = \lambda_n \varrho y\,, \tag{5.4}$$

tedy jsou vlastními vektory příslušnými k vlastním číslům λ_n s váhou ϱ diferenciálního operátoru $\mathbf{L} : y \mapsto -(py')'$, $y \in C^2(0;\infty)$. Abychom našli p, ϱ, λ_n, provedeme v rovnici (5.4) vnější derivování na levé straně, vydělíme ji p a výsledek porovnáme s rovnicí (5.3) vydělenou $-x$. Když porovnáme koeficienty u nulté derivace, vidíme, že je třeba položit $\lambda_n = n$ a $\varrho/p = 1/x$. Ze srovnání koeficientů u první derivace vyplyne rovnice pro p, kterou uvádíme rovnou i s jejím řešením

$$\frac{p'}{p} = \frac{s+1}{x} - 1\,, \qquad p(x) = x^{s+1}\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Váha ϱ je tedy $x^s\mathrm{e}^{-x}$. Rovnici (5.3) je tudíž možné zapsat v tzv. *samoadjungovaném tvaru*

$$-(x^{s+1}\mathrm{e}^{-x}y')' = nx^s\mathrm{e}^{-x}y\,, \quad n = 0,\,1,\,2,\dots \tag{5.5}$$

Nenulový polynom řešící tuto rovnici nazýváme (zobecněným[63]) *Laguerrovým polynomem.* Podle výše uvedeného je to konstantní nenulový násobek $F(-n, s+1, x)$. Pro určitost označíme $L_n^s = [(s+1)_n/n!\,]F(-n, s+1, x)$.

Dále budeme používat označení $\mathscr{L}^2_\varrho\big((a;b)\big)$, kterým myslíme prostor funkcí na $(a;b)$, které jsou kvadraticky integrabilní s váhou ϱ (tedy $\int_a^b \varrho|f|^2 < \infty$), se skalárním součinem $(f|g)_\varrho \overset{\text{df}}{=} \int_a^b \varrho f\overline{g}$; o váze ϱ předpokládáme, že je spojitá a kladná, tedy $\varrho(x) > 0$ na $(a;b)$. Lze ukázat, že se jedná o separabilní Hilbertův prostor. Pokud bude $\varrho \equiv 1$, budeme skalární součin někdy značit jako $(f|g)_1$ a někdy jen $(f|g)$.

[63] Pokud se tento přívlastek nepoužije, máme na mysli případ $s = 0$.

Věta 41: Laguerrova báze prostoru $\mathscr{L}^2_\varrho\big((0;\infty)\big)$
Pro libovolné $s > -1$ tvoří množina $\{L^s_n\}_{n=0}^\infty$ ortogonální bázi prostoru $\mathscr{L}^2_\varrho\big((0;\infty)\big)$ s váhou $\varrho(x) = x^s \mathrm{e}^{-x}$.

Důkaz: Ortogonalita. Fakticky budeme postupovat stejně jako při důkazu ortogonality vlastních vektorů hermitovské matice odpovídajících různým vlastním číslům.

Označíme pro zkrácení zápisu (při pevném s) $y_n = L^s_n$. Pro zvolené $n \in \mathbb{N}_0$ vynásobíme rovnost $\mathbf{L}y_n = n\varrho y_n$ (rovnost (5.5) s $y = y_n$) funkcí $\overline{y_k}$ ($k \in \mathbb{N}_0$, $k \neq n$) a získanou rovnost integrujeme přes interval $(0;\infty)$. Integrací per partes dostaneme postupně

$$n(y_n|y_k)_\varrho = \int_0^\infty n\varrho y_n \overline{y_k}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathbf{L}y_n \overline{y_k}\,\mathrm{d}x = \\ = \int_0^\infty y_n \mathbf{L}\overline{y_k}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty y_n k\varrho \overline{y_k} = k(y_n|y_k)_\varrho\,.$$

Všechny tyto integrály existují díky tomu, že se v integrandu vyskytuje faktor e^{-x} a y_n i y_k jsou polynomy; díky tomu také vymizí hraniční členy pro $x \to \infty$ při integraci per partes. Hraniční členy pro $x \to 0+$ vymizí díky $\varrho(0) = 0$. Poněvadž $n \neq k$, musí být $(y_n|y_k)_\varrho = 0$.

Úplnost. Máme dokázat, že libovolnou funkci z prostoru $\mathscr{L}^2_\varrho\big((0;\infty)\big)$ lze rozložit do Fourierovy řady podle systému $\{L^s_n\}_{n=0}^\infty$, což je ekvivalentní tomu, že jediná funkce z tohoto prostoru, která je ortogonální ke každému L^s_n, je identicky rovná nule. Protože $\widetilde{f} \in \mathscr{L}^2_\varrho\big((0;\infty)\big)$, právě když $f = \sqrt{\varrho}\,\widetilde{f} \in \mathscr{L}^2_1\big((0;\infty)\big)$, budeme místo toho dokazovat úplnost systému funkcí $f_n(x) = x^{\frac{s}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}L^s_n(x)$ v $\mathscr{L}^2_1\big((0;\infty)\big)$. Protože dále každé f_n je lineární kombinací funkcí $g_k(x) = x^{\frac{s}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^k$, $k = 0, 1, \dots n$, a naopak, je k tomu nutné a stačí dokázat úplnost $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ v $\mathscr{L}^2\big((0,\infty)\big)$, tedy

$$\forall f \in \mathscr{L}^2\big((0;\infty)\big)\ \big[(f|g_n)_1 = 0,\ n = 0, 1, 2, \dots\ \Rightarrow\ f \equiv 0\big]\,.$$

Vypočítáme Laplaceův obraz $F(p) = \mathscr{L}\big(f(t)t^{\frac{s}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\big)(p)$ s tím, že $F(p)$ existuje pro[64] $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2}$. Funkce $F(p)$ je pak holomorfní na okolí nuly

[64] Tato podmínka plyne pouze z toho, aby pro obecné $f \in \mathscr{L}^2((0;\infty))$ bylo $f(t)t^{s/2}\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-pt} \in \mathscr{L}^1((0;\infty))$.

s poloměrem alespoň $\frac{1}{2}$, a lze ji proto rozvinout do Taylorovy řady $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) p^n$. K tomu potřebujeme znát $F^{(n)}(0)$:

$$F^{(n)}(0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \int_0^{\infty} f(t) t^{\frac{s}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t \bigg|_{p=0} = \\ = \int_0^{\infty} (-1)^n f(t) t^{\frac{s}{2}+n} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t = (-1)^n \, (f|g_n)_1 = 0 \,.$$

Proto je $F = 0$ pro $|p| < \frac{1}{2}$. Pak ale musí být $F(p) = 0$ i pro libovolné p, $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2}$: použijeme tvrzení, že je-li holomorfní funkce identicky nulová na množině obsahující hromadný bod, pak je nulová všude, kam ji lze holomorfně rozšířit [23]. Podle věty o inverzi pro Laplaceovu transformaci dostáváme $f(t) t^{\frac{s}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \equiv 0$ skoro všude, tedy $f(t) \equiv 0$ skoro všude.

Dodejme, že důkaz úplnosti provedeme v paragrafu o Jacobiho polynomech jinak, a sice s odkazem na Stoneovu–Weierstrassovu větu. Tuto větu však lze použít pouze tehdy, kdy je uvažovaný interval kompaktní, proto jsme pro Laguerrovy polynomy volili jiný postup. □

Uvedeme ještě další způsoby definice či, chcete-li, výpočtu L_n^s. Nejprve to bude explicitní vzorec pro L_n^s. Zderivováním rovnice (5.1) a označením $z = y'$ dostaneme

$$\begin{aligned} xz'' + z' + (\gamma - x) z' - z - \alpha z &= 0 \,, \\ xz'' + (\gamma + 1 - x) z' - (\alpha + 1) z &= 0 \,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tedy derivováním Gaussovy redukované rovnice a označením $z = y'$ dostáváme opět Gaussovu rovnici, ovšem s koeficienty $\alpha + 1$ a $\gamma + 1$. Pokud tedy rovnici (5.1) derivujeme $(n-1)$-krát a upravíme ji na samoadjungovaný tvar, dostaneme

$$(x^{\gamma+n-1} \mathrm{e}^{-x} y^{(n)})' = (\alpha + n - 1) x^{\gamma+n-2} \mathrm{e}^{-x} y^{(n-1)} \,.$$

Označíme-li $F_n(x) = x^{\gamma+n-1} \mathrm{e}^{-x} y^{(n)}$, pak předchozí rovnice říká $F_n'(x) = (\alpha + n - 1) F_{n-1}(x)$ či indukcí $F_n^{(n)}(x) = (\alpha)_n F_0(x) = (\alpha)_n x^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-x} y$. Pro libovolné řešení původní (redukované) Gaussovy rovnice y tudíž platí

$$y(x) = \frac{1}{(\alpha)_n} \, x^{1-\gamma} \mathrm{e}^{x} \big(x^{\gamma+n-1} \mathrm{e}^{-x} y^{(n)}(x) \big)^{(n)} \,.$$

Použijme opět označení $\alpha = -n$, $\gamma = s + 1$; pokud zde položíme $y(x) = \frac{(s+1)_n}{n!} F(-n, s+1, x) = L_n^s(x)$, což je polynom stupně n s koeficientem