KAPITOLA 1

LOGIKA, MNOŽINY, ZOBRAZENÍ, NEROVNICE, MATEMATICKÁ INDUKCE

Tato kapitola bude věnována opakování a prohloubení znalostí ze střední školy. Přestože jde o pojmy důvěrně známé, uvedeme v úvodu každého odstavce alespoň jejich stručný přehled. Podrobné vysvětlení lze nalézt na začátku skript [KI], resp. v učebnici matematiky pro střední školy.

1.1. Logika

Základní pojmy, s nimiž matematická logika pracuje, jsou: *výroky, predikáty (výrokové funkce), logické spojky, kvantifikátory, základní věty.* Uvedeme přehled těchto pojmů; podrobnosti viz [KI], kap. 1, oddíl 1.

Výrok je (gramatická) věta, o níž má smysl říci, zda je či není pravdivá.

Pravdivostní hodnota výroku je nula, jestliže je výrok nepravdivý, a jedna, je-li pravdivý. Matematická logika dává návod, jak z výroků pravdivých (s pravdivostní hodnotou rovnou jedné) odvozovat další zaručeně pravdivé výroky; viz níže příklad B a dále.

Predikát neboli *výroková funkce* je zobrazení (viz oddíl 1.2.), které každému x z nějaké množiny M (zvané *pole objektů*) přiřazuje výrok $\mathcal{P}(x)$.

Logické spojky a *kvantifikátory* slouží k vytváření nových, složitějších výroků z daných výroků a predikátů.

Základní logické spojky jsou následující:

(1) $\vee$ — *disjunkce*: $A \vee B (= B \vee A)$ čteme A *vel* B, A *nebo* B.
(2) $\wedge$ — *konjunkce*: $A \wedge B (= B \wedge A)$ čteme A *et* B, A *i* B.
(3) non (=ne) — *negace*: non A čteme *není pravda, že (platí)* A.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(4) $\Rightarrow$ — *implikace*: $A \Rightarrow B (= B \Leftarrow A)$ čteme A *implikuje* B; *z* A *plyne* B; *platí-li* A, *pak platí* B; A *je postačující podmínkou pro* B; B *je nutnou podmínkou pro* A.

(5) $\Leftrightarrow$ — *ekvivalence*: Výrok $A \Leftrightarrow B$ čteme A *je ekvivalentní s* B*;* A *platí tehdy a jen tehdy* (zkráceně: *právě tehdy*), *když platí* B*;* A *je nutnou a postačující podmínkou pro* B*;* B *je nutnou a postačující podmínkou pro* A.

Poznámka. Při důkazech ekvivalentnosti výroků A a B často postupujeme přesně podle definice ekvivalence: dokazujeme dvě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Výrok vytvořený pomocí logických spojek z jednodušších výroků můžeme charakterizovat tak, že udáme tzv. *tabulku pravdivostních hodnot,* ve které vypíšeme pravdivostní hodnoty výsledného výroku pro všechny kombinace pravdivostních hodnot „vstupních” výroků:

Příklad A. Charakterizujte základní logické spojky jejich pravdivostními tabulkami.

Řešení.

(i) Výrok $A \vee B$ je pravdivý, právě když je pravdivý alespoň jeden z výroků A, B, případně oba, kdežto výrok $A \wedge B$ je pravdivý právě tehdy, když jsou pravdivé oba výroky A, B. Výrok $A \Rightarrow B$ je nepravdivý v jediném případě, a to když výrok A je pravdivý a výrok B je nepravdivý; Výrok $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý, právě když jsou pravdivé oba výroky $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$. Odud plynou následující tabulky disjunkce a konjunkce, resp. implikace a ekvivalence :

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

(ii) Výrok non A je pravdivý právě tehdy, když je výrok A nepravdivý. Tabulka negace:

A	non A
1	0
0	1

Základní kvantifikátory jsou tyto (M je pole objektů, $\mathcal{P}(x)$ je predikát):

(1) $\exists$ — *existenční kvantifikátor:* $\exists x : \mathcal{P}(x)$ (podrobněji $\underset{x\in M}{\exists} \mathcal{P}(x)$, případně v jiné úpravě $\exists x \in M : \mathcal{P}(x)$) čteme: existuje x z M tak, že platí $\mathcal{P}(x)$.

(2) $\forall$ — *obecný kvantifikátor*: $\forall x : \mathcal{P}(x)$ (podrobněji $\underset{x\in M}{\forall} \mathcal{P}(x)$, případně v jiné úpravě $\forall x \in M : \mathcal{P}(x)$) čteme: pro každé x z M platí $\mathcal{P}(x)$.

Základní zákony jmenujme dva:

(1) *Zákon sporu:*
Výrok $A \wedge \operatorname{non} A$ je vždy nepravdivý.

(2) *Zákon vyloučeného třetího:*
Výrok $A \vee \operatorname{non} A$ je vždy pravdivý.

Příklad B. Ukažte, že výroky $\operatorname{non}(A \Rightarrow B)$ a $A \wedge (\operatorname{non} B)$ jsou rovnocenné.

Řešení. Pod rovnocenností výroků chápeme to, že jsou buď oba pravdivé nebo oba nepravdivé, tj. že mají stejnou pravdivostní tabulku. (Formálně to znamená, že jsou ekvivalentní: $[\operatorname{non}(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\operatorname{non} B)]$.) A vskutku, jediný případ, kdy je výrok $(A \Rightarrow B)$ nepravdivý, je případ, kdy je A pravdivý a B nepravdivý. Podle definice negace to znamená, že výrok $[\operatorname{non}(A \Rightarrow B)]$ je naopak v tomto jediném případě pravdivý.

Na druhou stranu výrok $[A \wedge (\operatorname{non} B)]$ je pravdivý v jediném případě, když jsou pravdivé oba výroky A i $\operatorname{non} B$. A protože poslední výrok je pravdivý, právě když je výrok B nepravdivý, ukázali jsme, že oba výroky mají stejnou pravdivostní tabulku, a tedy dokázali jejich ekvivalenci. (Celý postup lze formalizovat tak, že postupně pro jednotlivé pravdivostní hodnoty výroků A, B určujeme pravdivostní hodnoty výroků složitějších, až získáme pravdivostní tabulky zkoumaných výroků.)

Uvedený příklad je speciální ukázkou negace základních logických spojek. Obecně platí:

(i) negace spojek:

non : negace negace je původní výrok: $(\operatorname{non}(\operatorname{non} A) \Leftrightarrow A)$;

$\vee$: negace disjunkce je konjunkce negací: $\operatorname{non}(A \vee B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} A \wedge \operatorname{non} B)$:

$\wedge$: negace konjunkce je disjunkce negací: $\mathrm{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, A \vee \mathrm{non}\, B)$.

$\Rightarrow, \Leftrightarrow$: viz Příklad B výše, resp. jeho kombinace s negací disjunkce.

(ii) Kvantifikované predikáty negujeme tak, že změníme typ kvantifikátoru a negujeme výroky predikátu:

$\forall$: $\mathrm{non}(\forall x : \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \exists x : \mathrm{non}\, \mathcal{P}(x)$;

$\exists$: $\mathrm{non}(\exists x : \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \forall x : \mathrm{non}\, \mathcal{P}(x)$.

Příklad C. Zapište negaci výroku

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : [(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)].$$

(Symbolem $\mathbb{R}$ značíme množinu reálných čísel, symbol $\mathbb{N}$ značí množinu přirozených čísel.)

Řešení. S použitím pravidel pro tvorbu negace dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
&\mathrm{non}\big[\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : [(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)]\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \mathrm{non}\big[\exists y \in \mathbb{N} : [(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)]\big] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{N} : \mathrm{non}[(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)] \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : \mathrm{non}(y \leq x) \vee \mathrm{non}(y + 1 > x).
\end{aligned}$$

Poslední výraz již čistě formálními úpravami zjednodušit nelze. Z teorie nerovností ale víme, že negací výroku $(y \leq x)$ je výrok $y > x$ a podobně $\mathrm{non}[y + 1 > x] \Leftrightarrow y + 1 \leq x$. S využitím této znalosti můžeme psát

$$\begin{aligned}
&\mathrm{non}\big[\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} :\ [(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)]\big] \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : (y > x) \vee (y + 1 \leq x).
\end{aligned}$$

Uvědomte si, že jsme nedokázali nic o tom, zda uvedený výrok je pravdivý nebo ne. Rozmyslete si pro zajímavost, zda je pravdivý výrok původní nebo negovaný!

(S danými omezeními je pravdivý výrok negovaný. Vskutku, stačí zvolit $x = -3,14$. Pak pro každé y přirozené je $y > 0 > -3,14$, což dokazuje tvrzení. Pokud ale rozšíříte pole přípustných y tím, že přirozená čísla nahradíte čísly celými, nebo naopak pole přípustných x zúžíte omezením $x \geq 1$, bude pravdivý výrok původní; dokažte!)

PŘÍKLADY

1. Napište tabulku pravdivostních hodnot následujících výroků:

a) $\mathrm{non}[A \vee (\mathrm{non}\, B)]$;

b) $[A \vee (\mathrm{non}\, B)] \Leftrightarrow C$;

c) $[(\mathrm{non}\, A) \wedge B] \vee [A \wedge (\mathrm{non}\, B)]$;

d) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

e) $\mathrm{non}\, [A \vee (B \wedge (\mathrm{non}\, A))]$;

f) $(\mathrm{non}\, A) \Rightarrow B$;

g) $\mathrm{non}\, [(\mathrm{non}\, B) \Leftrightarrow A]$;

h) $[\mathrm{non}\, (A \wedge B)] \Rightarrow \mathrm{non}\, B$;

i) $(A \wedge B) \Rightarrow C$;

j) $[A \Leftrightarrow (\mathrm{non}\, B)] \wedge [\mathrm{non}\, (B \Leftrightarrow A)]$.

2. Srovnáním tabulek pravdivostních hodnot dokažte rovnocennost výroků:

a) $\mathrm{non}\, (A \wedge B)$, $\quad (\mathrm{non}\, A) \vee (\mathrm{non}\, B)$;

b) $\mathrm{non}\, (A \vee B)$, $\quad (\mathrm{non}\, A) \wedge (\mathrm{non}\, B)$;

c) $A \vee (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

d) $A \wedge (B \vee C)$, $\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

e) $\mathrm{non}\, [A \wedge (\mathrm{non}\, B)]$, $\quad A \Rightarrow B$;

f) $(\mathrm{non}\, A) \vee B$, $\quad A \Rightarrow B$;

g) $A \Rightarrow B$, $\quad (\mathrm{non}\, B) \Rightarrow (\mathrm{non}\, A)$;

h) $[(\mathrm{non}\, A) \vee B] \wedge [A \vee (\mathrm{non}\, B)]$, $\quad A \Leftrightarrow B$;

i) $[(\mathrm{non}\, A) \wedge B] \vee [A \wedge (\mathrm{non}\, B)]$, $\quad \mathrm{non}(A \Leftrightarrow B)$;

j) $\mathrm{non}\, [A \vee (B \wedge (\mathrm{non}\, A))]$, $\quad (\mathrm{non}\, A) \wedge (\mathrm{non}\, B)$;

k) $\mathrm{non}\, [(\mathrm{non}\, B) \Leftrightarrow A]$, $\quad A \Leftrightarrow B$;

l) $[A \Rightarrow (\mathrm{non}\, B)] \wedge [\mathrm{non}\, (B \Rightarrow A)]$, $\quad (\mathrm{non}\, A) \wedge B$.

3. Zapište negaci následujících výroků a rozhodněte, který z obou, původního a negovaného, je pravdivý:

a) $\exists x : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

b) $\forall x : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

c) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 > 0$;

d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \geq 0$.