KAPITOLA 8

RIEMANNŮV (URČITÝ) INTEGRÁL

8.1. Riemannův (určitý) integrál

Předpokládáme, že čtenář zná teorii Riemannova integrálu v rozsahu například kapitoly 6, oddíly 6.6. – 6.15. v [KI]. Pro jeho pohodlí připomeneme základní definice a věty.

Definice 8.1. Jestliže supremum dolních součtů (dolní integrál) funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovno infimu horních součtů (horní integrál), pak jejich společnou hodnotu nazýváme *Riemannovým (určitým) integrálem* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a označujeme jej $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definice 8.2. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $b < a$ klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx$$

(pokud integrál napravo existuje) a pro $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} 0.$$

Definice 8.3. Integrálem komplexní funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ rozumíme

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx,$$

pokud integrály napravo existují.

Věta 8.1. *I. Platí*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx,$$

pokud integrály napravo existují a α, β jsou konstanty.

II. Je

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a),$$

kde C je konstantní funkce rovná číslu C.

Věta 8.2. (postačující podmínky existence integrálu) *Je-li f spojitá nebo je f monotónní a omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

Věta 8.3. *Integrál nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech.*

Věta 8.4. *Platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

pokud integrál přes největší z intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$ existuje.

Věta 8.5. *Má-li f integrál, má jej i $|f|$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f|(x)\,dx,$$

přičemž uvedená nerovnost platí pouze pro $a \le b$. Z integrovatelnosti $|f|$ obecně neplyne integrovatelnost f.

Věta 8.6. *Mají-li f i g integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(x) \le g(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zde je podstatné, že $a \le b$.

Věta 8.7. *Má-li f integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak jej má na každém intervalu $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$.*

Věta 8.8. *Existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, pak pro každé c mezi a a b je funkce*

$$F_c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^x f(t)\,dt$$

spojitá na $\langle a, b\rangle$. Je-li f spojitá v bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, pak je $F_c'(x_0) = f(x_0)$. Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak je F_c primitivní k f na $\langle a, b\rangle$.

Základem pro výpočet Riemannova integrálu je následující věta:

Věta 8.9. (Newtonova – Leibnizova formule) *Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a F je k ní na $\langle a, b\rangle$ primitivní, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \stackrel{\text{def}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Tento vzorec platí i pro $b \le a$, je-li f spojitá a F k ní primitivní na $\langle b, a\rangle$.

Věta 8.10. (integrace per partes) *Mají-li u a v spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak je*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Platí to i pro $b \le a$ se stejnou modifikací předpokladů jako v předchozí větě.

Věta 8.11. (o substituci) *Nechť funkce φ má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$ a zobrazuje tento interval na interval J. Nechť funkce f je spojitá na J. Potom platí*

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Je-li φ navíc ryze monotónní, pak body $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ jsou koncové body intervalu J, k φ existuje na J inverzní funkce φ^{-1} a pro každé α, $\beta \in J$ je

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Poznámka 8.1. (analogická poznámce 7.3. z kapitoly 7) Máme-li spočítat integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, můžeme novou integrační proměnnou zavádět dvojím způsobem: 1) $x = \varphi(t)$ $(dx = \varphi'(t)\,dt)$. V tomto případě musíme předpokládat, že φ je ryze monotónní, abychom mohli určit meze pro t: $\varphi^{-1}(a)$, $\varphi^{-1}(b)$. 2) $y = \psi(x)$. V tomto případě nemusíme mít ψ ryze monotónní, ale musíme umět vyjádřit $f(x)$ ve tvaru $h(\psi(x))\psi'(x)$ s nějakou funkcí h. Meze pro y pak budou $\psi(a)$, $\psi(b)$ a použijeme fakticky první vzoreček z věty 8.11. se záměnou x místo t, y místo x a ψ místo φ[17] . Je-li ψ navíc ryze monotónní s nenulovou derivací, pak z $y = \psi(x)$ vyjádříme x ve tvaru $x = \psi^{-1}(y)$ a postupujeme jako v bodu 1).

Poznámka 8.2. Při počítání Riemannova integrálu můžeme postupovat dvojím způsobem: 1) Určíme nějak (per partes, substitucí, apod. – viz předchozí kapitola) primitivní funkci F k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a užijeme Newtonův – Leibnizův vzorec. 2) Nebo budeme užívat věty 8.10. a 8.11. (tj. metodu per partes a substituční metodu pro určitý integrál). Oba postupy mají své přednosti a nedostatky. Při prvním postupu musíme někdy zbytečně vypisovat i ty členy, které po dosazení do Newtonovy – Leibnizovy formule dají nulu. Na druhé straně nemusíme pokaždé přepočítávat meze a také můžeme derivováním prověřit, zda jsme primitivní funkci určili správně. Tím jsme už vyjádřili přednosti a nedostatky druhého postupu.

Příklad A. Máme spočítat integrál

$$\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx.$$

1) Užijeme první postup (per partes):

$$\begin{aligned} \int x^2\cos x\,dx &= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx = \\ &= x^2\sin x - [2x(-\cos x) + \int 2\cos x\,dx] = \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x \end{aligned}$$

[17] Nesmíme zapomenout, že funkce f musí být spojitá na $\langle a, b\rangle$: použijeme-li například formálně substituci $y = \cos x$ na integrál $\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$, dostaneme integrál $-\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-y}\,dy$, který existuje, zatímco původní integrál neexistuje.

(užili jsme dvakrát per partes: poprvé s $u' = \cos x$, $v = x^2$, podruhé s $u' = \sin x$, $v = 2x$). Je proto

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = [x^2 \sin x]_0^\pi + [2x \cos x]_0^\pi - [2 \sin x]_0^\pi = 0 - 2\pi - 0 = -2\pi.$$

2) druhý postup:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx = [x^2 \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \sin x \, dx =$$
$$= -\{[2x(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi 2 \cos x \, dx\} = -2\pi - 2[\sin x]_0^\pi = -2\pi.$$

Příklad B. Spočtěme integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx.$$

1) první postup: uděláme-li substituci

$$t = \sqrt{5-4x},\ t^2 = 5 - 4x,\ x = \frac{5-t^2}{4},\ dx = -\frac{t}{2}\, dt,$$

dostaneme

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \int \frac{5-t^2}{4} \frac{1}{t} \frac{-t}{2} \, dt =$$
$$= \frac{1}{8} \int (t^2 - 5) \, dt = \frac{1}{8}(t^3/3 - 5t) = \frac{1}{8}\sqrt{5-4x}(\frac{5-4x}{3} - 5).$$

Dosazení do Newtonovy – Leibnizovy formule dá

$$\frac{1}{8}((1/3 - 5) - 3(3-5)) = \frac{1}{8}(-14/3 + 6) = \frac{1}{8}\frac{4}{3} = \frac{1}{6}.$$

2) druhý postup: substituce $t = \sqrt{5-4x}$ dá

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \frac{1}{8} \int_3^1 (t^2 - 5) \, dt = \frac{1}{8}[t^3/3 - 5t]_3^1 =$$
$$= \frac{1}{8}(1/3 - 5 - 27/3 + 15) = \frac{1}{8}(1/3 + 1) = \frac{1}{8}\frac{4}{3} = \frac{1}{6}.$$