KAPITOLA 1

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

1.1. Rovnice 1. řádu – úvod

Obecný tvar rovnic 1. řádu je

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Obecná teorie a metody řešení jsou vypracovány především pro rovnice tvaru

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

(tzv. *rovnice vyřešené vzhledem k nejvyšší derivaci*). Rovnice tvaru (1) lze řešit převedením na tvar (2), pokud je to možné, a vyšetřením singularit případ od případu, případně jinak (viz oddíl 1.6.).

O funkci f předpokládáme vždy, že je definována a spojitá (jako funkce dvou proměnných) na množině $\Omega \subset \mathbb{R}_2$. (Množina Ω bývá většinou oblast, tj. otevřená souvislá množina. V jednotlivých konkrétních případech připustíme i množiny jiného typu.)

Definice 1. Řešením rovnice (2) rozumíme interval (α, β) a funkci φ, definovanou na tomto intervalu a takovou, že platí

(i) $\forall x \in (\alpha, \beta) : (x, \varphi(x)) \in \Omega$,
(ii) $\forall x \in (\alpha, \beta)\ \exists \varphi'(x)$ a platí $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

(Mluvíme o řešení rovnice (2) na intervalu (α, β).) Analogicky se definuje řešení rovnice (1) (jak?). (Podmínku (i) lze zapsat též ve tvaru $[\varphi] \subset \Omega$, kde symbol $[\varphi]$ značí graf funkce φ.)

Poznámka 1. a) Každé řešení rovnice (2) (nebo i rovnice (1)) je nutně spojité na svém definičním oboru, protože podle bodu (ii) tam má vlastní derivaci. Pro rovnici typu (2) lze ve vztahu (ii) užít větu o spojitosti složené funkce a tak dokázat, že tato derivace je spojitá. (Podobná úvaha pro rovnice tvaru (1) už není tak jednoduchá.) Existence resp. spojitost vyšších derivací funkce φ pak záleží na tom, zda funkce f má derivace vyšších řádů resp. jsou-li spojité.

b) Interval (α, β) je součástí definice řešení. Dvě funkce φ_1, φ_2, definované na různých intervalech (α_i, β_i), $(i = 1, 2)$, tvoří různá řešení, i když na průniku $(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ mají stejné hodnoty.

Definice 2. Řekneme, že funkce φ definovaná na intervalu (α, β) je *maximálním* (nebo *úplným*) řešením rovnice (2), jestliže platí:

(i) funkce φ je řešením rovnice (2) na intervalu (α, β),

(ii) je-li φ_1 řešení rovnice (2) na intervalu $(\alpha_1, \beta_1) \supset (\alpha, \beta)$, pro které platí $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ na (α, β), pak je $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha, \beta)$. (Maximální řešení je tedy takové, které nelze dále prodloužit.)

Věta 1. *Každé řešení rovnice* (2) *lze prodloužit do maximálního. (Toto prodloužení není obecně jednoznačné.)*

Poznámka 2. Zaveďme do množiny všech (reálných) funkcí (jedné reálné proměnné) uspořádání následujícím způsobem: řekneme, že funkce φ je větší nebo rovna funkci ψ (píšeme $\varphi \succeq \psi$, resp. $\psi \preceq \varphi$), jestliže je $[\varphi] \supset [\psi]$. Pak můžeme definici 2. a větu 1. vyslovit takto:

a) φ je maximální řešení, jestliže pro každé řešení ψ takové, že $\varphi \preceq \psi$, platí $\varphi = \psi$.

b) Ke každému řešení φ existuje maximální řešení ψ takové, že $\varphi \preceq \psi$.

Poznámka 3. Definici řešení i ostatní předchozí definice a věty lze vyslovit obecněji bez požadavku otevřenosti definičního intervalu, jestliže v krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace.

Definice 3. Buď $(x_0, y_0) \in \Omega = \mathcal{D}(f)$ daný bod a buď φ řešení rovnice (2) na (a, b).

(i) Řekneme, že řešení φ prochází bodem (x_0, y_0), jestliže je $x_0 \in (a, b)$ a platí

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{3}$$

(jinými slovy, jestliže $(x_0, y_0) \in [\varphi]$).

(ii) Řekneme, že řešení jdoucí bodem (x_0, y_0) je určeno lokálně jednoznačně, jestliže pro každá dvě řešení φ, ψ splňující (3) lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $\varphi = \psi$ na $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \mathcal{D}(\varphi) \cap \mathcal{D}(\psi)$.

(iii) Je-li pro každá dvě φ, ψ, jdoucí bodem (x_0, y_0), $\varphi = \psi$ na $\mathcal{D}(\varphi) \cap \mathcal{D}(\psi)$, mluvíme o globální jednoznačnosti.

Poznámka 4. a) Jiná formulace bodu (ii): lokální jednoznačnost řešení v bodě (x_0, y_0) znamená, že každá dvě řešení jdoucí tímto bodem mají společnou minorantu (ve smyslu uspořádání z poznámky 2.), definovanou na nějakém intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Říkáme též, že určují tentýž *zárodek* (anglicky: germ, francouzsky: germe). (Jestliže dvě funkce určují tentýž zárodek, pak příslušné ε záleží na těchto dvou funkcích a pro jiné dvojice určující tento zárodek může mít jinou hodnotu.)

b) Vzhledem k větě 1. lze globální jednoznačnost ekvivalentně formulovat jako jednoznačnost maximálního řešení.

c) Stručně lze tedy říci: Podmínka (3) určuje řešení rovnice (2) globálně jednoznačně, jestliže určuje jediné **úplné** řešení; určuje ho lokálně jednoznačně, jestliže určuje jediný **zárodek** řešení.

Věta 2. *Buď funkce f definována na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ a buď $(x_0, y_0) \in \Omega$ daný bod.*

(i) *Je-li f spojitá na Ω, pak bodem (x_0, y_0) prochází alespoň jedno řešení. (Peano.)*

(ii) *Je-li f lipschitzovská na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) vzhledem k proměnné y, pak je toto řešení určeno lokálně jednoznačně.*

(iii) *Je-li f lokálně lipschitzovská na celém Ω, je řešení určeno podmínkou (3) globálně jednoznačně.*

Komentář. Připomeňme, že funkci jedné proměnné $g = g(t)$ nazýváme lipschitzovskou v bodě t_0, jestliže existuje takové kladné ε a taková kladná konstanta M, že za podmínky $|t - t_0| < \varepsilon$ platí $|g(t) - g(t_0)| < M|t - t_0|$. Podmínka lipschitzovskosti vzhledem k y na nějaké množině B pak znamená

$$\begin{aligned} &\exists M > 0 \quad \forall (x, y_1), \forall (x, y_2) \in B : \\ &|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|. \end{aligned} \tag{4}$$

Funkce f je lokálně lipschitzovská, jestliže ke každému bodu $(x, y) \in \Omega$ existuje okolí bodu (x, y), na kterém je funkce f lipschitzovská. K tomu, aby byla splněna podmínka (ii) z věty 2., stačí například, aby funkce f měla v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$, spojitou v bodě (x_0, y_0). Ke splnění předpokladu (iii) tedy například stačí, aby $\frac{\partial f}{\partial y}$ byla spojitá na Ω. Poznamenejme, že ani spojitost $\frac{\partial f}{\partial y}$ není nutnou podmínkou lipschitzovskosti, ani lokální lipschitzovskost není nutnou podmínkou jednoznačnosti řešení.

Geometrická interpretace. Jak předchozí text naznačuje a jak dále uvidíme na konkrétních příkladech (příklad D., E.), některými body oblasti Ω může procházet nejedno řešení. Rovnice (2) nicméně umožňuje vypočítat směr řešení v bodě (x_0, y_0) pouze z hodnot x_0, y_0 nezávisle na tom, kolik řešení jím prochází a které řešení zvolíme. Funkce f tedy každému bodu (x, y) přiřazuje jednodimenzionální vektorový prostor (směr), generovaný vektorem $(1, f(x, y))$; říkáme, že funkcí f definujeme na Ω *směrové pole.* (Můžeme si ho znázornit tak, že v bodě (x, y) zakreslíme krátkou úsečku daného směru a tuto konstrukci provedeme pro dostatečné množství bodů oblasti Ω; srovnej příklad A. a obr. 1.) Úlohu nalézt řešení rovnice (2) můžeme geometricky interpretovat jako hledání křivky dané grafem spojité a spojitě diferencovatelné funkce, která se v každém bodě přimyká k danému vektorovému poli.

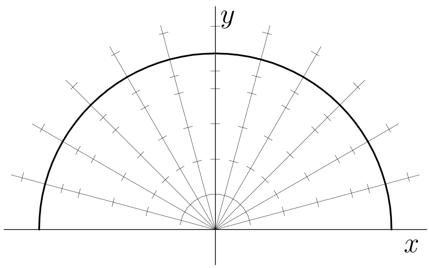
(Stejnou úvahu nemůžeme aplikovat na rovnici (1) v těch bodech (x_0, y_0), ve kterých nelze vypočítat y'. Později uvidíme, že je to v podstatě věci: potkáme se s rovnicemi, u nichž některými body prochází několik řešení v různých směrech — „řešení se kříží"; porovnej s příkladem E.)

Poznámka 5. Předchozí konstrukce směrového pole poskytuje návod k hledání přibližného řešení tzv. *Eulerovou – Cauchyovou* metodou (polygonální metoda, metoda Peanových lomených čar): řešení procházející bodem (x_0, y_0) nahradíme na intervalu $(x_0, x_0 + h)$ úsečkou o směrnici $k_0 = f(x_0, y_0)$; tak dostaneme v bodě $x_1 = x_0 + h$ přibližnou hodnotu y_1 a postup opakujeme s bodem (x_1, y_1). (Podobně lze postupovat „zpět" do bodu $x_0 - h$, atd.) Lze ukázat, že při zmenšování „kroku" $h > 0$ dostaneme množinu přibližných řešení, ze které lze vybrat posloupnost, konvergentní k přesnému řešení (srovnej příklady 11, 12).

Tato metoda není zdaleka jediná. K numerickým výpočtům je vypracována řada metod (viz též poznámka 9. z oddílu 1.10.). Předností uvedené metody je její myšlenková i početní jednoduchost; kromě toho má též význam teoretický (důkaz Peanovy existenční věty, což je bod (i) naší věty 2.).

Příklad A. Sestrojte směrové pole rovnice $y' = -x/y$ na množině $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2; y > 0\}$. Na základě této konstrukce odhadněte, jak bude vypadat řešení a ověřte správnost svého předpokladu.

Řešení. Směrové pole je konstantní na křivkách tvaru $-x/y = k$, tj. $y = -x/k$, což jsou polopřímky vycházející z počátku. Hodnota směrnice pole v každém bodě takové polopřímky je rovna k a směrnice příslušné polopřímky je rovna $-1/k$. Z analytické geometrie víme, že v tom případě je směrové pole kolmé k přímce, jdoucí (tímto bodem) a počátkem (obr. 1).



Obr. 1

Křivka všude kolmá k průvodiči je kružnice (se středem v počátku). Řešení tedy bude mít asi tvar

$$\varphi(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}, r > 0, x \in (-r, r).$$

Ověřme:

(i) $$\forall x \in (-r, r) \quad \text{je} \quad \varphi(x) > 0,$$

(ii) $$\varphi'(x) = -x/\sqrt{r^2 - x^2} = -x/y.$$