KAPITOLA 4

VARIAČNÍ POČET

4.1. Klasický variační počet

Definice. Nechť X je normovaný lineární vektorový prostor.

i) *Funkcionál* Φ na X je zobrazení $\Phi : X \to \mathbb{R}_1$.

ii) Nechť x_0, $h \in X$. Existuje-li $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\Phi(x_0+th)-\Phi(x_0)}{t}$, pak ji označíme symbolem $D\Phi(x_0;\ h)$ a nazveme *Gâteauxovým diferenciálem* funkcionálu Φ v bodě x_0 a ve směru h.[5]

iii) Existuje-li spojité lineární zobrazení $\Phi'(x_0) : X \to \mathbb{R}_1$ takové, že zbytek, definovaný vztahem $\eta(h) = \Phi(x_0+th) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)h$ splňuje podmínku $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = 0$, pak zobrazení $\Phi'(x_0)$ nazveme *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu Φ v bodě x_0.

iv) Lze definovat také Gâteauxovy resp. Fréchetovy diferenciály vyšších řádů, my budeme potřebovat druhý Gâteauxův diferenciál. Pokud pro dané $h \in X$ existuje Gâteauxův diferenciál funkcionálu $D\Phi(x,h)$ (závisícího na x) v bodě x_0 a ve směru k , pak jej nazveme *druhým Gâteauxovým diferenciálem* a označíme $D^2\Phi(x_0;h,k)$.

v) Je-li Φ funkcionál na X, $M \subset X$, pak bod $x_0 \in M$ nazveme bodem *(ostrého) lokálního maxima* funkcionálu Φ vzhledem k M, pokud existuje okolí $U(x_0)$, pro které platí $x \in U(x_0) \cap M \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(x_0)$ $(\Phi(x) < \Phi(x_0),\ x \neq x_0)$. Analogicky se definují body *(ostrého) lokálního minima.* Místo body lokálního maxima (minima) se stručně říká lokální maxima (minima). *(Ostrými)*

---

[5] Označíme-li $F(t) = \Phi(x_0 + th)$ při x_0, h pevných, je $D\Phi(x_0;h) = F'(0)$. Je také $F''(0) = D^2\Phi(x_0;h,h)$. Dokonce i pro $t \neq 0$ je $F'(t) = D\Phi(x_0 + th;h)$, $F''(t) = D^2\Phi(x_0 + th;h,h)$, pokud první resp. druhý diferenciál existuje na okolí bodu x_0.

lokálními extrémy funkcionálu Φ nazýváme jeho (ostrá) lokální maxima nebo minima.

vi) Bod x_0 nazveme *kritickým bodem* nebo *stacionárním bodem* funkcionálu Φ, jestliže pro všechny $h \in X$ je $D\Phi(x_0; h) = 0$.

Poznámka. 1. Je-li $X = \mathbb{R}_n$ a $||h|| = 1$, pak zřejmě Gâteauxův diferenciál v bodě x_0 ve směru h je právě derivace funkce Φ ve směru h. Specielně pro $h = e_i$ je $D\Phi(x_0; e_i)$ totožný s $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_0)$. Fréchetův diferenciál $\Phi'(x_0)h$ je v tomto případě totožný s totálním diferenciálem funkce Φ.

2. Ve fyzice bývá často Fréchetův diferenciál $\Phi'(x_0)$ označován symbolem $\delta\Phi$ a nazýván variací funkcionálu Φ. Směr h, ve kterém se derivuje, bývá označován symbolem δx.

Věta 1 (Eulerova). *Nechť $x_0 \in X$ a nechť existuje $D\Phi(x_0; h)$ pro všechna $h \in X$. Má-li Φ v x_0 lokální extrém, pak je x_0 kritickým bodem Φ, tj.*

$$\forall h \in X \;\; D\Phi(x_0; h) = 0.$$

Věta 2 (Lagrangeova). *Nechť $x_0 \in X$ a pro všechna $h \in X$ existuje $D^2\Phi(x_0; h, h)$. Má-li Φ v x_0 lokální minimum, pak*

$$\forall h \in X \;\; D^2\Phi(x_0; h, h) \geq 0.$$

Věta 3 (Lagrangeova). *Nechť je $D\Phi(x_0; h) = 0$ pro všechna $h \in X$. Nechť pro všechna $x \in U(x_0)$ a všechna $h \in X \setminus \{0\}$ je*

$$D^2\Phi(x; h, h) \geq 0 (> 0).$$

Pak má Φ v x_0 (ostré) lokální minimum.

Označení. Pro $M \subset \mathbb{R}_n$ symbolem $C^{(k)}(M)$ rozumíme vektorový prostor reálných funkcí na M, které mají na M spojité derivace do řádu k včetně s konečnou normou

$$||f|| = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_M |D^\alpha f(x)|,$$

kde

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \;\; |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

$$\mathring{C}^{(1)}(\langle a,b\rangle) \overset{def}{=} \{y \in C^{(1)}(\langle a,b\rangle);\ y(a)=y(b)=0\}.$$

Základní úloha klasického variačního počtu je tato:

Nechť $f(x,y,z) \in C^{(3)}(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}_2)$; $A,B \in \mathbb{R}_1$ a nechť

$$\mathfrak{M} = \{y \in C^{(1)}(\langle a,b\rangle);\ y(a)=A,\ y(b)=B\}.$$

Definujme na $\mathfrak{M}$ funkcionál Φ předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx. \tag{1}$$

Úlohou je najít body lokálního extrému, eventuelně kritické body funkcionálu Φ.

Poznámka. Aby tato úloha zapadla do schématu, obvyklého v abstraktním variačním počtu (viz věty 1.–3. výše), stačí zvolit $y_0 \in \mathfrak{M}$ pevně a přejít k funkcionálu $\tilde{\Phi}(u) = \Phi(y_0+u)$ na prostoru $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathring{C}^{(1)}(\langle a,b\rangle)$, což už je, na rozdíl od $\mathfrak{M}$, vektorový prostor.

Věta 4 (Eulerova – Lagrangeova). *Má-li funkcionál* (1) *lokální extrém v bodě $y_0 \in \mathfrak{M}$, pak na intervalu $\langle a,b\rangle$ platí*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0(x),y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))\right\} = 0. \tag{2}$$

Poznámka. Často se Eulerova – Lagrangeova rovnice (2) zapisuje stručněji a přehledněji takto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0,y_0')\right\} = 0, \text{ nebo } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

i když by tím mohlo dojít k nedorozumění. Čtenář při tomto stručném zápisu musí vědět, že do argumentu (x,y,z) funkce f se dosazuje postupně x, $y_0(x)$, $y_0'(x)$, a že rovnice (2) je tedy obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu pro neznámou funkci y_0 (při pevně zadané funkci f). Řešení této rovnice se často nazývají *extremálami.*

Hlavní myšlenka důkazu. Předpokládejme navíc, že $y_0 \in C^{(2)}(\langle a,b\rangle)$. Potom podle věty 1. a příkladu 1. (viz příklady na konci tohoto oddílu) je

$$0 = D\Phi(y_0;h) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0,y_0') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0,y_0')\right)\right] h\,dx$$

pro všechna $h \in \overset{\circ}{C}{}^{(1)}(\langle a,b\rangle)$, což je možné právě tehdy, je-li výraz v hranaté závorce roven 0 na $\langle a,b\rangle$ (viz lemma 1. v dodatku 2. v [K3]).

Věta 5 (Legendreova). *Je-li y_0 bod lokálního minima funkcionálu* (1) *na $\mathfrak{M}$, pak pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$ je*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) \geq 0.$$

Definice. Nechť $f \in C^{(3)}(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}_2)$, $y_0 \in C^{(2)}(\langle a,b\rangle)$ a nechť $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0$ na $\langle a,b\rangle$. Označme pro zjednodušení zápisu

$$P(x) = P[y_0](x) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y_0(x),y_0'(x))$$

$$Q(x) = Q[y_0](x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))\right\}.$$

Pak Eulerova–Lagrangeova rovnice funkcionálu

$$\psi(h) = D^2\Phi(y_0;h,h) = \int_a^b [P(h')^2 + Qh^2]\,dx$$

má tvar

$$-(Ph')' + Qh = 0 \text{ na } \langle a,b\rangle$$

a nazývá se *Jacobiho rovnicí* funkcionálu (1) v bodě y_0.

Řekneme, že bod $x \in (a,b\rangle$ je *konjugovaný bod* k bodu a Jacobiho rovnice, jestliže existuje netriviální řešení h této rovnice na intervalu $\langle a,x\rangle$, splňující $h(a) = h(x) = 0$.

Věta 6 (Jacobiho). *Nechť y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu (1) na $\mathfrak{M}$. Potom v (a, b) neexistuje konjugovaný bod Jacobiho rovnice.*

Věta 7. *Nechť $y_0 \in C^{(2)}(\langle a, b\rangle) \cap \mathfrak{M}$ řeší Eulerovu–Lagrangeovu rovnici pro funkcionál (1) na $\langle a, b\rangle$. Nechť v $(a, b\rangle$ neexistuje konjugovaný bod. Nechť*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \text{ na } \langle a, b\rangle.$$

Pak y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu (1).

Poznámka. Analogické věty platí pro lokální maximum.

Věta 8 (Lagrangeovy multiplikátory). *Nechť X je Banachův prostor a f, g jsou funkcionály na X. Nechť existují Fréchetovy derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$, přičemž $g'(x_0) \not\equiv 0$ (tj. $g'(x_0)$ není identicky nulový funkcionál). Nechť f má v bodě x_0 lokální extrém vzhledem k množině*

$$\mathfrak{C} = \{x \mid g(x) = g(x_0)\}.$$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}_1$ tak, že $f'(x_0) = \lambda g'(x_0)$.

Příklad A. Nalezněte lokální extrémy funkcionálu

$$\Phi(y) = \int_0^1 [(y')^4 - 6(y')^2]\, dx$$

na množině

$$\mathfrak{M} = \{y \in C^{(1)}(\langle 0, 1\rangle);\ y(0) = 0,\ y(1) = A\},\ A \in \mathbb{R}_1.$$

Řešení. E.–L. rovnice má tvar $\frac{d}{dx}\{4y'({y'}^2 - 3)\} = 0$, a tedy $4y'({y'}^2 - 3)$ =konst., odkud plyne y' =konst. na $\langle a, b\rangle$. Jediná extremála, která splňuje okrajové podmínky je funkce $y_0(x) = Ax$. Protože je $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0, y_0') = 12(A^2 - 1)$, je podle věty 5. nerovnost $|A| \geq 1$ ($|A| \leq 1$) nutnou podmínkou pro to, aby tato extremála byla bodem lokálního minima (maxima) funkcionálu Φ. Jacobiho rovnice má tvar $h'' = 0$, její extremály jsou tedy přímky, z čehož plyne, že v intervalu $(0, 1\rangle$ neexistují konjugované body Jacobiho rovnice. Podle věty 7. dává tedy pro $|A| > 1$ ($|A| < 1$) extremála y_0 lokální minimum (maximum). Případ $|A| = 1$ nelze pomocí uvedených vět rozhodnout.